**Завдання командам.**

**1.** Розв’яжіть нерівність .

**2.** Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівняння .

**3.** Доведіть, що параболи  і  перетинаються в чотирьох точках, які належать одному колу. Знайдіть координати центра і радіус цього кола.

**4.** Знайдіть усі трійки дійсних чисел *x, y, z*, для яких виконується рівність

.

**5.** Доведіть, що для всіх натуральних *n* число  ділиться на 19.

**6.** Площина квадрата і площина рівностороннього трикутника заповнені однаковою кількістю рівних кругів так, що круги дотикаються до сторін цих фігур і один до одного. До сторони трикутника дотикається на 14 кругів більше ніж до сторони квадрата. Скільки всього кругів потрібно, щоб заповнити площини квадрата і трикутника?

**7.** Основи трапеції дорівнюють *а* і *b* (*a* < *b*). Діагоналі поділяють трапецію на чотири трикутники. Найменша із площ цих трикутників дорівнює *S*. Обчисліть площі інших трьох трикутників.

**Завдання командам.**

**1.** Розв’яжіть нерівність .

**2.** Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівняння .

**3.** Доведіть, що параболи  і  перетинаються в чотирьох точках, які належать одному колу. Знайдіть координати центра і радіус цього кола.

**4.** Знайдіть усі трійки дійсних чисел *x, y, z*, для яких виконується рівність

.

**5.** Доведіть, що для всіх натуральних *n* число  ділиться на 19.

**6.** Площина квадрата і площина рівностороннього трикутника заповнені однаковою кількістю рівних кругів так, що круги дотикаються до сторін цих фігур і один до одного. До сторони трикутника дотикається на 14 кругів більше ніж до сторони квадрата. Скільки всього кругів потрібно, щоб заповнити площини квадрата і трикутника?

**7.** Основи трапеції дорівнюють *а* і *b* (*a* < *b*). Діагоналі поділяють трапецію на чотири трикутники. Найменша із площ цих трикутників дорівнює *S*. Обчисліть площі інших трьох трикутників.

**Розв’язання задач.**

**1.** Розв’яжіть нерівність .

***Розв’язання.***

Ведемо заміну , тоді . Оскільки , то . Розв’яжемо нерівність 

, . Звідси .

Повернемося до заміни:

  

Отже, .

***Відповідь. *.**

**2.** Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівняння .

***Розв’язання.***

Розкриємо дужки, виконаємо групування, розкладемо рівняння на множники:

,

,

,

 ,

.

Таким чином, шукана множина точок є об’єднанням трьох прямих , *х* = 2, *у* = 2.

***Відповідь.*** *, х =* 2*, у =* 2.

**3.** Доведіть, що параболи  і  перетинаються в чотирьох точках, які належать одному колу. Знайдіть координати центра і радіус цього кола.

***Розв’язання.***

Помножимо рівняння параболи  на 2, отримаємо:

 або . Оскільки , то

,

– рівняння кола. Знайдене рівняння є наслідком системи тому кожен розв’язок цієї системи буде розв’язком рівняння кола. Отже, усі спільні точки заданих парабол належать колу з центром (6; 1) і радіусом 5. Щоб переконатися, що параболи перетинаються в чотирьох точках, потрібно їх побудувати.

***Відповідь.*** *О*(6; 1), *R* = 5.

**4.** Знайдіть усі трійки дійсних чисел *x, y, z*, для яких виконується рівність

.

***Розв’язання.***

Піднесемо обидві частини рівності до квадрату:

,

,

.

Звідси *х* = 1, *у* = 2, *z* = 3. Знайдені числа перетворюють підкореневий вираз у нуль, тобто задовольняють умові рівності нулю усієї лівої частини рівності.

***Відповідь****.* (1; 2; 3).

**5.** Доведіть, що для всіх натуральних *n* число  ділиться на 19.

***Розв’язання.***

= ==

= = = .

Оскільки , то . Тому різниця  ділиться на 19. Доданок  також кратний 19. Отже, сума  кратна 19.

**6.** Площина квадрата і площина рівностороннього трикутника заповнені однаковою кількістю рівних кругів так, що круги дотикаються до сторін цих фігур і один до одного. До сторони трикутника дотикається на 14 кругів більше ніж до сторони квадрата. Скільки всього кругів потрібно, щоб заповнити площини квадрата і трикутника?

***Розв’язання.***

Нехай до сторони квадрата дотикається *n* кругів. Тоді, для заповнення площини квадрата потрібно  кругів. Оскільки до сторони трикутника дотикається на 14 кругів більше, тобто , то для заповнення ними площини трикутника потрібно:

. Складемо рівняння , корінь якого – *n* = 35. Отже, до сторони квадрата дотикається 35 кругів, а для заповнення ними площини квадрата потрібно . Для заповнення площини трикутника потрібно  кругів. Тоді загальна кількість кругів становитиме:  = 2450.

***Відповідь.***2450.

**7.** Основи трапеції дорівнюють *а* і *b* (*a* < *b*). Діагоналі поділяють трапецію на чотири трикутники. Найменша із площ цих трикутників дорівнює *S*. Обчисліть площі інших трьох трикутників.

***Розв’язання.***

Побудуємо трапецію *ABCD*, у якій *AD = b*, *BC* = *a*. Діагоналі трапеції перетинаються в точці *О*.



Оскільки , то , тобто .

У трикутниках *АВО* і *COD* проведемо висоти *ВМ* і *DN* відповідно. Висота *ВМ* є спільною для трикутників *АВО* і *ВОС*. Із зазначеної подібності випливає, що *АО* > *СО*, тому . Трикутники *АВО* і *COD* рівновеликі, оскільки рівновеликі трикутники *АВС* і *BCD*, тому

. Оскільки *АО* > *СО* і , то *ВМ* < *DN* .

Визначимо площі трикутників *АОВ* і *AOD*:

, . Звідси .

Отже, найменшу площу має трикутник *ВОС*, .

Оскільки то .

Із подібності трикутників *AOD* і *СОВ* випливає, що  або .

Тоді = = .

*Відповідь.* , .