РОЗДІЛ 8

ВСЕУКРАЇНСЬКИЙ ТУРНІР МАТЕМАТИЧНИХ БОЇВ

Другий Всеукраїнський турнір математичних боїв імені члена-кореспондента НАНУ Ядренка М. Й.

Другий Всеукраїнський турнір математичних боїв імені Ядренка М. Й. відбувся з 28 жовтня по 3 листопада 2007 року на території Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Змагання були проведені у двох лігах - старшій (10-11 класи) та молодшій (8-9 класи). У перший день 28 жовтня в неділю після відкриття була проведена "математична карусель". Л далі впродож 5 днів проходили 5 турів математичних боїв. Виходячи з кільмнті учасників у кожній лізі була запропонована своя схема для проведення змагання. У молодшій лізі команди були за результатами каруселі розбиті на 2 групи по 4 команди. Після змагань в групах, були проведені півфінали, а в останній день - фінальні баталії за 1-8 місця. У старшій лізі так само команди були розбиті на 2 групи, але по 6 команд. Після 4-х турів у групах в останній день команди, іцо посіли однакові місця в групах, зустрічалися в стикових зустрічах за остаточні місця. За результатами поданих заявок на участь у Другому Всеукраїнському турнірі математичних боїв імені члена-кореспондента НАНУ Ядренка М. Й. було сформовано 8 команд у молодшій лізі (по 6 учасників) та 12 команд у старшій лізі (по 7 учасників).

Математична карусель

На Всеукраїнському турнірі карусель тривала протягом 2 годин, на вихідному рубежі учасникам було запропоновано 14, а на заліковому 20 завдань. За результатами каруселі було сформовано групи.

Молодша ліга

Вихідний рубіж

1.(561) Знайдіть найменше просте число, яке можна подати у вигляді суми трьох попарно різних простих чисел.

2.(562) Скількома способами можна поставити на шахівницю фер їм, який б'є найменшу кількість клітин?

3.(563) Сума трьох натуральних чисел дорівнює 100. Яке значення може приймати їх НСД?

4.(564) Внаслідок вимірювання чотирьох сторін та однієї із діагоналей деякого чотирикутника були отримані числа 15, 23, 36, 50, 72. Чому може дорівнювати довжина виміряної діагоналі?

5.(565) Чотири меценати пожертвували театру 132 тисячі гривень. При цьому другий пожертвував вдвічі більше від першого, третій - втричі більше другого, четвертий - в чотири рази більше третього. Скільки пожертвував перший?

{$.(566) На шахівниці 8 x 8 стоять тури таким чином, що кожна з них б'є N тур. При яких N це можливо? (Тура б'є в кожному напрямі тільки найближчу туру).

7.(567) У двоцифрового числа переставили цифри і одержане число додали до початкового. Одержали квадрат натурального числа. Скільки різних двоцифрових чисел мають таку властивість?

8.(568) В прямокутнику 1×2 відмічені 6 точок - чотири вершини та 2 середини більших сторін. Скільки існує прямокутних трикутників з вершинами в цих точках?

9.(569) Вася задумав натуральне число, помножив його на 13, викреслив останню цифру результату, одержане число помножив на 7, знову викреслив останню цифру результату і одержав число 21. Яке число задумав Вася?

10.(570) Відомо, що серед N монет одна - фальшива, більш легка, а решта - справжні. При яких N за два зважування іш двочашкових вагах можна гарантовано знайти фальшиву монету, а одного зважування при цьому буде недостатньо?

11.(571) У касі є монети по 50, 10 та 5 копійок. Скількома різними способами можна видати клієнту суму в 1 гривню?

12.(572) На стороні AB трикутника ABC вибрані точки M і N таким чином, що $AM : MИ : BИ = 1 : 2 : 3$. Через точки M і N проведені прямі, які паралельні стороні AC трикутника. Знайти площу частини трикутника, який розташований між цими прямими, якщо площа $AABC$ дорівнює 5.

13.(573) Частка втричі більша діленого і вдвічі більша від дільника. Знайти ділене, дільник та частку.

14.(574) На картках по одному написані усі цілі числа від 1 до 15. Одну картку загубили, і виявилось, що сума чисел на інших картках - просте число. Яка картка могла бути загублена. (Вкажіть усі варіанти).

Заліковий рубіж

1.(575) Скільки різних значень при натуральних n $(1 < n < 100)$

приймає дріб $_p f_n$у де *p(n)* - добуток усіх простих дільників числа *п* (в перших степенях).

2.(576) Яку найбільшу кількість точок самоперетину може мати замкнена ламана, яка складається з 7 ланок, жодні дві з яких не лежать на одній прямій?

3.(577) Відомо, що [Л] = 2000, а *[B* — 2, де через [я] позначена ціла частина числа *x.* Скільки різних значень може приймати *[A • B]?*

4.(578) В трапеції *ABCD* основа *AB* = 13 а основа *CD* = 5. Знайти площу трапеції, якщо відомо, що діагоналі трапеції є бісектрисами кутів *ZDAB* та */.ABC.*

5.(579) Розв'язати в натуральних числах рівняння: $2^x+3^y+5^z = 136$.

6.(580) Піднімаючись пішки сходами хмарочосу, Джон на підйом між першим та другим поверхом витратив 10 сек., а на кожний наступний проліт між поверхами витратив на 1 сек. Більше, ніж на попередній. Між якими поверхами Джон буде через 10 хвилин?

7.(581) Поставте на місці "?" такий знак арифметичних дій (+, —, x, :), щоб вийшло найбільше можливе значення (плюси та мінуси йдуть по черзі):

- L + (J L _ (r J L + (r _ i _ _ (r J L +... _ (К + і ! ? веч . Л W .
102 V 1 0 3 \Ю4 \105 V106 \ Ж 199 *200J*))))

8.(582) У коло радіуса 1 вписаний рівнобедрений трикутник, у якого сума основи та висоти, що проведена до основи, дорівнює діаметру. Знайти довжину цієї висоти.

9.(583) Знайти найбільше натуральне число, цифри якого ко повторюються і яке ділиться на 99.

10.(584) Які значення може приймати периметр десятиклітинного багатокутника на дошці в клітинку, зі стороною клітинки 1?

11.(585) Знайдіть усі значення виразу $x + y + z + xyz$, для додатних чисел *x,y, z,* які задовольняють систему рівнянь:

x н- $y + xy =$ **8,**
$y + z + yz$ — 15,
$x + z + xz = 35.$

\

12.(586) *AH* і *CP* - висоти рівнобедреного трикутника *ABC*, з вершиною *B.* Якою може бути величина */.B,* якщо відомо, що *AC — 2HP?*

13.(587) У скількох двоцифрових чисел сума цифр більша від добутку цифр?

14.(588) За круглим столом сидіть $N > 6$ людей. При яких N вони можуть пересісти таким чином, щоб будь-які два попередніх сусіди репер будуть сидіти через 2 людини?

15.(589) Яке найбільше значення приймає вираз

ПІФАГОР + КОШІ?

(однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним - різні). Скількома способами можна замінити букви цифрами, щоб одержати це максимальне значення? Дати відповідь на обидва питання.

16.(590) В трикутнику *АВС* із сторонами *a, b, c* проведена медіана CM_1, в $\triangle BCM_1$ проведена медіана M_1M_2, в $\triangle CM_1M_2$ - медіана M_2M_3, в $\triangle M_1M_2M_3$ - медіана M_3M_4 і т.д. Чому дорівнює довжина відрізку $M_{2006}M_{2007}$?

17.(591) Яку остачу при діленні на 30 має число 13^{13}?

18.(592) Яку найменшу кількість клітин квадрата 5 х 5 можна зафарбувати таким чином, щоб в будь-якому чотириклітинному прямокутнику була хоча б одна зафарбована клітинка?

19.(593) Знайти усі такі пари натуральних чисел (m,n), для яких $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{(m,n)}{[m,n]} = 1$, де (m,n) і $[m,n]$ - НСД и НСК чисел m, n відповідно.

20.(594) Скільки існує трикутників, довжини сторін яких дорівнюють цілому числу сантиметрів і не перевищує 10 см?

Старша ліга

Вихідний рубіж

1.(595) Скільки існує натуральних чисел, у яких кожні дві сусідні цифри утворюють точний квадрат?

2. Дивись задачу № 562.

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2. \end{cases}$$

4. Дивись задачу № 582.

5. Дивись задачу № 591.

6. Дивись задачу № 570.

7.(597) При яких значеннях параметру a дріб $\frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}{a^5 - 3a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 3a - 1}$ приймає максимальне значення?

8. Дивись задачу № 578.
9. Дивись задачу № 569.
10. Дивись задачу № 568.
11. Дивись задачу № 593.
12. Дивись задачу № 572.
13. Дивись задачу № 574.
14.(598) Продовжіть послідовність одним числом 1,10,100,101,111, **1000, 1010, 1011, 1101, 1110,...**

<u>*Заліковий рубіж*</u>

1. Дивись задачу № 580.
2. Дивись задачу № 583.
3. Дивись задачу № 590.
4.(599) Знайдуть найбільше та найменше значення виразу

v/4*а* + 1 + v/4*Ь* + *1* + *у/4с*+ *1,*

якщо *а* + *b* + *с* = *1.*

5. Дивись задачу № 585.
6.(600) Скількома способами серед перших 100 натуральних чисел можна обрати пару різних чисел, сума яких записується числом, яке містить нуль?
7.(601) В ДАВС на найбільшій стороні АС = Ь обирається точка М. Знайдіть найменшу відстань між центрами кіл, які описані навколо трикутників АВМ і ВСМ.
8. Дивись задачу № 589.
9.(602) Які значення може приймати периметр десятиклітинного багатокутника на дошці в клітинку, зі стороною клітинки 1?
10. Дивись задачу № 579.
11.(603) З точки О проведений промінь. Під кутом у 10° за рухом годинникової стрілки до нього з тим самим початком проведений другий промінь, далі від другого променя під кутом у 20° за рухом годинникової стрілки проведений третій промінь і т.д. Кожен наступний кут у 2 рази більший від попереднього. Яка кількість різних променів виявиться на рисунку?

12.(604) Розв'яжіть нерівність: у4 — ^ < *х* — *ух* —

13. Дивись задачу № 588.
14. Дивись задачу № 575.
15. Дивись задачу № 594.
16. Дивись задачу № 585.
17. Дивись задачу № 592.
18. Дивись задачу № 587.

19.(605) Яка найбільша кількість вершин може бути у плоского опуклого багатокутника, якщо кожна з них знаходиться на деякій грані кубу, а сам багатокутник не лежить в жодній грані кубу? (Грані розглядаються з межами).

20. Дивись задачу № 581.

<u>*Математичні боі*</u>

Матпедеатпггчний *бій і*
(29 жовтня 2007 року)

<u>Молодша ліга</u>

1.(606) Розв'язати систему нерівностей:
$$'3x + 2y + 4г^2 > 6,$$
$$2x\ 4\text{-}\ у^2 + 4г^2 < 4,$$
$$x + Аг + 4г^2 < 0.$$

2.(607) На сторонах *AB,BC,CA* трикутника *ABC* вибрано точки *C\,Ai,B* відповідно таким чином, що прямі *AAi, BB*і та *CC* перетинаються в точці *K.* З точки *K* на сторони трикутника опущено перпендикуляри. Через основи цих перпендикулярів на сторонах трикутника проведені прямі з, які паралельні прямим, що симетричні прямим *AA\, BB* та *CC* відносно бісектрис кутів */.A, /.B* та */-C* відповідно. Довести, що прямі *Ii,I2,Iз* перетинаються в одній точці.

3.(608) Про задані натуральні числа *m* і *n* відомо, що *m* 4- *n* > 10. Доведіть, що існує таке натуральне число *к,* для якого *к* < $2^{т+п}$ та число (1 + 2^m + 2^n)*к* - 2007 ділиться на 2^{m+n}.

4.(609) Послідовність ($и_п$) задана умовами: щ = 0, «і = ^ о та $\frac{2}{O}$-u_n = / н- гі,,_і). Ч тт Довести, що для усіх натуральних *n* виконується нерівність: |и,,| < 1.

5.(610) Є *n* книг, що лежать одна на одній. Занумеруємо їх 1,2,... *,n.* У кожному турі ми робимо п ходів таким чином - г-й хід полягає в тому, що ми перевертаємо верхні *і* книг як одне ціле. Після кожного туру ми аналогічним чином проводимо наступний. Доведіть, що після якоїсь кількості хода ми прийдемо до початкової розстановки усіх книг.

6.(611) Розв'язати в натуральних числах рівняння:
$$(x^2 + 2)(у^2 + 3)(г^2 + 4) = 60xyг.$$

7.(612) У трапеції *ABCB* на бічних сторонах *АП* і *BC* як на діаметрах побудовані кола, які перетинаються в точках *M* і *N.* Довести, що точка перетину діагоналей трапеції лежить на прямій *MИ.*

8.(613) Всі клітини таблиці *п* х *п* пофарбовані в білий та чорний кольори. Відомо, що до межі прилягає принаймні *п* чорних та *п* білих клітин. Довести, що знайдеться не менше ніж *п* різних пар сусідніх різнокольорових клітин, які, можливо, перетинаються.

9.(614) Назвемо число "хорошим", якщо в десятковому запису його присутня рівно один раз кожна цифра з 1,2,___,9. Крім того, цифри 1,2,...,5 розміщені в порядку зростання, а цифра 6 - лівіше від цифри 5. Знайти кількість усіх "хороших" чисел.

10.(615) Числа від 1 до 2007 записані в комірки стрічки 1 х 2007. Двоє гравців по черзі відмічають комірки даної стрічки. Програє той, після ходу якого існують такі два натуральні числа *т* < *п,* що сума чисел у всіх відмічених комірках з номерами від *т* до *п* ділиться на 2008. Довести, що існує принаймні тисяча початкових розташувань чисел у комірках, таких що для будь-яких натуральних *і* та *і* таких, що 1 <*і* < *і* < 2007, сума чисел у комірках з номерами *і, і* +1,...,*з* не ділиться на 2008, при яких перший гравець має виграшну стратегію.

Старша ліга

1.(616) Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \quad +1) = y(y^2 + 3), \\ j/(3*^2 + l) = z(z^2 + 3), \\ z(3x^2 + 1) = x(x^2 + 3). \end{cases}$$

2. Дивись задачу № 613.

3.(617) Для дійсних чисел *a, b, c* Є [0,1] довести нерівність:
$$\frac{"}{1 + Ьc} + \frac{Ь}{1+ac} + \frac{c}{I + ab} + abc \le \frac{5}{2}.$$

4.(618) Трикутник ***ABC*** має гострі кути при вершинах ***А*** і ***В.*** На сторонах ***AC*** і ***BC,*** як на основах, в зовнішній бік побудовані рівнобедрені трикутники ***ACD*** і ***BCE.*** Відомо, що ***ZADC = ZABC,*** а ***ZBEC = /BAC.*** Нехай ***O*** - центр кола, описаного навколо трикутника АВС, а ***P****ABC* ~ периметр трикутника АВС. Доведіть, що коли ***OD + OE = PABC,*** то трикутник ***ABC*** - прямокутний.

5. Дивись задачу № 615.

6.(619) Дано трикутник ***ABC*** з кутом ***/ACB*** = 60°. Нехай точку ***E*** обрано на стороні ***AC*** таким чином, що ***CE*** < ***BC.*** Точка ***D*** належить відрізку ВС таким чином, що $\frac{AE}{BL)} — \frac{BC}{CE}$ 1. Позначимо через У точку перетину прямих ***AD*** і ***BE.*** Нехай кола, що описані навколо трикутників *AEP* і *BDP* перетинаються в точках *P* і *Q*. Довести, що прямі *QE* і *BC* паралельні.

7. (620) Позначимо для довільного натурального числа m через *o(m)* суму усіх його дільників, а через f(m) - функцію Ойлера (кількість натуральних чисел, які не перевищують m та взаємно прості з ним). Довести, що існує нескінченно багато таких натуральних чисел *n,* для яких виконується нерівність: *tp* (<т(п)) > ті.

8.(621) Дано послідовність многочленів *Po{x), Pi(x), ...,* $P_n(x)$, *n* > 2. Відомо, що для кожного цілого *i* (0 < *i* < *n) :* deg *{Pi(x))* = *n — i,* причому $P_n(x)$ *ф* 0. Також відомо, що для кожного цілого *i* (2 < *i* < *n*) знайдеться многочлен *Qi(x)* такий, що P*i*{*x*) — Pi_$_2$(а;)+ +Pi-i*(x)*Qi*(x)*. Довести, що якщо многочлени *R(x)* та *S(x)* задовольняють рівність *Po(x)R(x)* + *P\(x)S(x)* = 1 для всіх дійсних *x,* то deg *(R(x))* > *n* — 2 та deg *(S(x))* > *n* — 1. (Тут через deg *P(x)* позначено степінь многочлена *P{x)).*

9.(622) Знайти усі функції / : R —> R, які задовольняють рівняння:

10.(623) На нескінченному аркуші паперу в клітинку 2006 сторони клітинок пофарбовані в чорний колір, а всі інші - в білий. Дозволяється обирати деяку клітинку та перефарбовувати всі її сторони на протилежний колір. Відомо, що існує спосіб перефарбувати у білий колір всі сторони клітинок. Чи обов'язково для цього вистачить:

а) 250000 перефарбувань;
б) 260000 перефарбувань?

Математичний бій 2
(ЗО жовтня 2007 року)

Молодша ліга

1.(624) Задано гострокутний трикутник *ABC. O* - центр описаного кола, ***H*** - ортоцентр, і ***AHA, BHB, CHC*** - висоти ***AABC.*** Позначимо через Аі, Ві, Сі - центри кіл, що описані навколо трикутників ВОС, *СОА* та *АОВ* відповідно. Довести, що прямі *А\На*, *В\Нв, С\Нс* перетинаються в одній точці, яка лежить на прямій Бйлера ААВС. Прямою Ойлера трикутника є пряма, що з'єднує центр описаного кола та центр ваги трикутника.

2.(625) Опуклий шестикутник АВСИЕР задовольняє такі умови:

1) АВ\\БЕ, ВС\\ЕР, СБ\\РА ;

2) відстані між цими парами паралельних прямих - однакова;

3) /РАБ = /СБЕ = 90°. Довести, що діагоналі *ВЕ* і *СР* шестикутника перетинаються під кутом 45°.

3.(626) На дошці один або декілька разів поспіль записали натуральне число *а* у десятковому представленні й отримали двійковий запис того самого числа *а.* Знайдіть усі можливі значення *а.*

4.(627) Вісім команд розігрують першість в одне коло, тобто кожна команда грає з кожною іншою один раз, при цьому розклад змагань складено за турами - у кожному турі грає кожна команда. Через скільки щонайменше турів з початку чемпіонату може бути вже відомі команди, що посіли перше та останнє місця (тобто при будь-яких інших результатах в турах, що залишились ці команди все одно наберуть найбільшу та найменшу кількість очок у строгому розумінні), якщо це була

а) першість з волейболу, де за перемогу команда отримує 1 очко, за поразку - 0 очок і нічиїх не буває;

б) першість з гандболу, де за перемогу команда набирає 2 очка, за поразку - 0 очок, за нічию кожна команда набирає 1 очко?

5.(628) Знайти кількість пар натуральних чисел (п,т), що задовольняють рівняння (2*) ! = $2^n m$.

6.(629) Задано граф з *п* вершинами. Довести, що можна орієнтацію на його ребрах таким чином, щоб модуль різниці між кількостями тих ребер, що входять у вершину та тих, що виходять з неї, не перевищував одиниці.

7.(630) Розв'язати систему рівнянь:

$$3(x^2 + y^2 + г^2) = 1,$$
$$x^2y^2 + y^2г^2 + г^2x^2 = xyг(x + y + г)^г.$$

8.(631) Для довільних невід'ємних чисел *x,y,г* довести нерівність:

$$\frac{1}{-}(я^3 + y^3 + г^3) > xyг + \frac{3}{—}|(гжт - y)(x - г)\{y - г)\backslash.$$

9.(632) Знайти усі множини ЛсМ, які містять принаймні два числа і таких, що для кожних двох різних *x,y* Є *А* число $\frac{x \quad y}{}$ ЄI((i,!/)- НСД чисел *x, y).*

10.(633) Послідовність чисел ($a_п$) задається за правилом:

$$a_i = a_2 = \quad a_n — \frac{a^2 \quad + 2}{a_{„\_2}}, \; n > 3.$$

Довести, що усі члени послідовності цілі числа.

Старша ліга

1. Дивись задачу № 626.

2.(634) Точка *Р* обрана на стороні *АВ* трикутника *ABC.* На сторонах *АС* і *ВС* обрано точки *X,* У відповідно таким чином, що */АХР = /.ВУР.* Знайти геометричне місце точок М - середин відрізків ХУ, для усіх можливих пар точок X, У.

3.(635) Послідовність дійсних чисел ($a_п$) задана рекурентно: ai > 0, $°п+i = \frac{'2°"}{a_n + 1}$ • Довести, що існує натуральне п, для якого $a_n > \frac{77—7}{10 у п}$.

4.(636) *р* - просте число і множина 5 = {1,2, ...,р}. Нехай *Ai,A2,—,$A_р$* - вершини правильного р-кутника, *О* - його центр. Знайти всі підмножини *а* С 5, для яких виконується рівність: **Е** ***OA****i* = "б.

5.(637) Задана квадратна таблиця 4 х 4. У кожній комірці цій' таблиці записане або "0", або "1". Скільки існує способів розставити ці числа так, щоб добуток кожних двох чисел, які записані в комірках із спільною стороною, був рівний 0.

6.(638) Нехай множина X = <!$\{-1,0,1}. Функція / : X X визначена таким чином:

*Пх) = х-К /(,)(*) = Пх), /***(п> = / (/(п-х> (*)) , п Є** *N.*

Чи існує *х Є X* таке, що для довільного п є *N* існує *у Є X* таке, що /<">(») = »?

7. Дивись задачу № 634.

8.(639) В трикутнику *ABC* з кутом */.ВАС >* 60° проведено бісектриси *ВИ* і *СЕ.* Довести, що АО + *АЕ < ВС.*

9.(640) Розв'язати рівняння:

1_________+__________1_________+__________1___________15

10. Дивись задачу № 628.

Математичний бій 3
(31 жовтня 8007 року)

<u>Молодша ліга</u>

1.(641) Знайти усі такі прості числа ***p,*** для яких існують цілі числа

$$\begin{cases} p + 1 = 2x^2, \\ po + 1 = 2y\sigma^2. \end{cases}$$

2.(642) Нехай *А, В* - два трицифрових натуральних числа, через АВ позначимо шестицифрове число, яке отримується приписуванням справа від цифр числа *А* цифр числа *В.* Знайти всі *А, В* такі, що *А, В, В — А, АВ* та $\frac{уЦ\}}{B}$ квадрати цілих чисел.

3.(643) На нескінченній шаховій дошці розставлені пішаки через кожні три поля на четвертому. Довести, що шаховий кінь не зможе обійти всі вільні поля, побувавши на кожному полі рівно по одному разу.

4.(644) У математичному бої брали участь 8 команд. Відомо, що у кожної команди існує не більше трьох команд, з якими вона не хоче грати. Довести, що команди можна розбити на пари таким чином, щоб у кожні з цих пар команди хотіли грати між собою. (Якщо команда "А"хоче грати проти команди "Б", то й навпаки, команда "Б" хоче грати проти команди "А").

5.(645) Нехай задано натуральні числа ***a, Ь, c, d*** такі, що ***a*** + ***Ь*** + 1 = с+ ***+d*** + 1 = ***p,*** де ***p*** ~ просте число, \ ***а ф с*** (mod 2), Довести або

спростувати твердження: a! Ь! + c! d! : p.

6.(646) Довести, що якщо коло, яке вписане в трикутник АВС, дотикається до його сторін *АВ, ВС, СА* в точках *С\,А\,В* відповідно, то справджується нерівність

$$\frac{9}{p\sim} \quad \frac{1}{ABг} + \frac{}{BCг} + \frac{1}{CAг'}$$

де ***p*** - півпериметр трикутника АВС.

7.(647) Є декілька чисел, кожне з яких менше 2007. Відомо, що найменше спільне кратне будь-яких двох чисел більше 2007. Довести, що сума обернених величин цих чисел менше 2.

8.(648) Знайти усі п'ятицифрові числа *abode,* у яких рівно *a* цифр - нулі, рівно *Ь* - одиниці, рівно с - двійки, *d* - трійки, е - четвірки. Різні букви не обов'язково означають різні цифри.

9.(649) Нехай *ABCD* - трапеція, точка *X* - довільна точка основи АВ. Позначимо таким чином точки перетину

P = CBnAD,Y = CDnPX,R = AYnBDiT = PRnAB.
Довести, що

$$\frac{1}{AT} \sim - \frac{1}{AX} + \frac{1}{AB'}$$

10.(650) Нехай *a,Ь,c* - сторони деякого трикутника, *P* - його периметр. Довести нерівність:

$$\frac{P + 2004a}{P - 2a} \quad \frac{P + 20046}{P ^ 2 6} \quad \frac{-P + 2004c}{P - 2c} \sim \frac{3}{2007},$$

Старша ліга

1.(651) Є школа в якій навчається 2007 учнів та викладає 14 вчителів. Відомо, що кожний учень знайомий принаймні з одним вчителем, а кожній вчитель знайомий принаймні з одним учнем. Знайти найбільше дійсне 4 таке, що завжди можна знайти пару знайомих між собою вчителя *A* та учня *B,* що відношення кількості учнів, з якими знайомий вчитель *A* до кількості вчителів, з якими знайомий *B,* не менше від

2.(652) 2007 цілих чисел розташовані на колі таким чином, що для будь-яких п'яти чисел, що йдуть поспіль, сума деяких трьох з них в два рази більше суми двох інших. Довести, що всі ці числа є нулями.

3.(653) Знайти усі пари функцій /,д К —> К таких, що справджуються рівності:

I) / (ХУIУ + !)) + У = ^{X}/(У) + / (^{X} + 9IУ)) Для будь-яких дійсних *Я'і У'і*

' 2)№ + д{0)=0.

4.(654) Для усіх натуральних *n* довести рівність:

$$\sum_{к=0}^{П-1} \left(\frac{_nк}{к + 1}\right)^2 \quad \frac{ггп}{2п'}$$

5.(655) Заданий опуклий шестикутник *P — ABCБEP,* у якого відомі сторони *AB = СБ = ЮЕ — PA =* 2, *ВС = EP =* \/2 і кути */B = /С = /Е = /P =* 135°, */A = /Б =* 90°. Всередині його задані точки М, /V, К, що задовольняють умови *AK = KB =* $\frac{\sqrt{26}}{}$*, ВМ =* 1 , *MC =* o *DN = y/2,* Побудувати опуклий шестикутник Pj = *WUVXYZ,* що вписаний в *P* (усі вершини Pi лежать на периметрі P), у якого протилежні сторони попарно паралельні (WU та XY, C7V та *YZ, ZW* та УX), точки *M, N,K* лежать на периметрі Pj та жодна з сторін шестикутника *P* не паралельна сторонам *P.*

6.(656) На колі *w* з центром в точці *O* вибрані точки *A,B,C,D.* Позначимо точки перетину прямих *AB* П *CD = P, AD* П *BC = R, AC* П *BD* — *Q.* Кола, що описані навколо трикутників *ADP* і *BCP* мають центри в точках Oi та O^ відповідно і перетинаються в точках *P ЇX.* Аналогічно, кола, що описані навколо *AABQ* і *ACDQ,* мають центри в точках *Oз* та *O4* і перетинаються в точках *Q* і У ; кола, що описані навколо *AACR* і *ABDR,* мають центри в точках *O5* та *Oe* і перетинаються в точках *R* і *Z.* Довести, що кола, які описані навколо трикутників **O1O2X, O3O4Y, OsOqZ,** перетинаються в одній точці.

7.(657) Нехай непарні натуральні числа *m,n* > 1. Різні дійсні числа записано в клітинах таблиці m x n (т рядків та п стовпчиків). Числа називається "хорошим", якщо

1) Воно найбільше в своєму рядку (стовпчику).
2) Воно середнє за значенням у своєму стовпчику (рядку).

Яка найбільша можлива кількість хороших чисел?

8.(658) Додатні числа *a, b, c, d* задовольняють умову:

1 1 1 1 ,
a b e d

Довести, що справджується нерівність:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}}+\sqrt[3]{Id?+a^3} < 2(a + Ь + c + cO-4.$$

9.(659) Знайти усі непарні натуральні числа п, для яких існують **непарні натуральні числа Xї,**, . . . , x_n такі, що $x^2 + x\backslash$ 4-... + x^2 — $п^4$.

10. Дивись задачу № 646.

Математичний бій 4
(1 листопада 2007 року)

Молодша ліга

1.(660) У прямокутнику площею 5 розміщені дев'ять прямокутників, площа кожного з яких дорівнює 1. Довести, що площа спільної частини якихось двох прямокутників не менша 1/—.

2.(661) Розв'язати систему рівнянь ЙС — »1 — 3) (|3® + » | - 3) = 0,
{4x} = 0,

де {о} - дробова частина числа *а.*

3.1.(662) Нехай сума додатних чисел *х\,* ..., x_n дорівнює одиниці. Доведіть нерівність: 1 £ 1 Н 2 + — 1 2 1 2 — ^

≥(— + — + + —^ (1 + 1 + + 1 + 1 \
~ X_2 X_n) \ y/XiX_2 y/X2X_3 y/X,,-iX_n y/X_nX\)

3.2.(663) Для чисел 0 < *а* < *Ь* < *с* доведіть нерівність:
(а + 2*Ь){Ь* + 3с)(с + 4а) > бОаЬс.

4.(664) У гострокутному трикутнику *АВС /ВАС* = 60°, *АВ* > *АС,* *О* і *Н* - центр описаного кола та ортоцентр відповідно трикутника. Пряма *ОН* перетинає сторони *АВ* і *АС* в точках *Р* і Довести, що *РО* =

5.(665) Послідовність цілих чисел визначається за правилом: аі - довільне трицифрове число, а„+і - сума квадратів цифр числа *а„* , *п* **є N.** Довести, що в послідовності ($a_п$) обов'язково зустрінеться або 1, або 4.

6.(666) 1971 цифр виписані по колу. Відомо, що якщо читати ці цифри за рухом годинникової стрілки, починаючи з деякого місця, то одержане 1971-цифрове число ділиться на 27. Довести, що якщо почати читати за годинниковою стрілкою це число з будь-якого іншого місця, то це число також буде ділитись на 27.

7.(667) У заданому чотирикутнику *АВСБ* кути */.САБ* = 45°, */АСИ* = 30°, */ВАС* = *АВСА* = 15°. Знайти величину кута *АБВС.*

8.1.(668) Дошка *п х п* поділена на n^2 одиничних квадратів. "Квазідіагоналлю" назвемо будь-які *п* клітинок, серед яких жодні дві ие знаходяться в одному рядку чи стовпчику. На дошці розставлені дури таким чином, що на кожній квазідіагоналі стоїть рівно 2 тури. Будемо вважати, що 2 тури б'ють одна одну, якщо вони знаходяться Л одному рядку чи стовпчику. Знайти за таких умов мінімальну кількість пар тур, які б'ють одна одну.

8.2.(669) Дошка n x п поділена на $п^2$ одиничних квадратів. "Квазідіагоналлю" назвемо будь-які п клітинок, серед яких жодні дві яе знаходяться в одному рядку чи стовпчику. На дошці розставлені тури таким чином, що на кожній квазідіагоналі стоїть рівно 2 тури. Довести, що усі фішки стоять або у двох стовпчиках, або у двох рядках.

9.(670) Знайти усі натуральні m, ***n*** і прості числа ***p*,** такі що

$$п^5 + п^4 + 1 = p^т.$$

10.(671) Олексій (за білих) та Дмитро (за чорних) грають у таку гру. В кутах шахової дошки стоять два королі - білий на "аі", чорний - на "h8". Гравці ходять по черзі, починають білі. Гравець може ставити свого короля на будь-яке сусіднє поле, якщо воно вільне, при цьому відстань між полями, на яких будуть розташовані королі (кількість ходів короля за шаховими правилами між цими двома полями), не повинна збільшуватись. Олексій прагне першим поставити свого короля на вертикаль "h" або на восьму горизонталь, а Дмитро - на вертикаль "а" або на першу горизонталь. Хто перемагає при правильній грі?

Старша ліга

1.(672) Доведіть, що для будь-якого многочлена *P(x)* існують такі многочлени *F(x)* і *G(x),* що при усіх дійсних *x* виконується рівність *F{G{x))-G{F{x))* = *P(x).*

2.(673) Знайдіть найменше а, для якого існує така послідовність додатних чисел (x,,), *n* **є** Z^+, що для будь-якого натурального *n* виконується нерівність: *Xo* 4- *X* + ... + x_n < *ax,,-\.*

3.(674) Знайдіть усі цілі числа $p > q > 0$, такі, що нерівність **[px]+[py]** > *\qx+y\+[x+qy* справджується для усіх дійсних *x, y* **Є [0,1].**

4.(675) У квадраті 3 x 3 відмітили усі вершини клітин. Яка найбільша кількість із відмічених точок можна пофарбувати у червоний колір таким чином, щоб ніякі чотири червоні точки не були вершинами квадрата із стороною 1 , 2 , 3 або s/2?

5.(676) У переодягальні Палацу спорту шафи для одягу розташовані у формі прямокутника 3 ж 425. Шафи першого ряду занумеровані числами від 1 до 425 (послідовно зліва направо), шафи другого ряду - числами від 426 до 850, а третього - числами від 851 до 1275. Адміністрація Палацу спорту вирішила провести ремонт. Після нього шафи виявились занумерованими по-іншому: в першому стовпчику знаходяться шафи з номерами від 1 до 3 (послідовно зверху донизу), у другому - від 4 до 6 і т. д. Троє друзів, у яких раніше шафи знаходились у різних рядках, після ремонту з'ясували, що новий номер шафи кожного з них раніше був номером шафи одного з двох інших. Знайдіть номери їх шаф.

6.(677) Нехай *a,b,cid-* цілі числа. Відомо, що *S — ad* > 0 та кожен з трьох квадратних тричленів ax^2 *+ Ьх + (с — d),* ax^2 *+ Ьх + (с + d),* $ах^2$ + Ьх + с, має раціональні корені. Доведіть, що існує прямокутний трикутник з цілими сторонами та площею *S.*

7.(678) Маємо повну колоду з 52 карт. З них довільним чином вибираються набір з k карт, 1 < k < 52. Назвемо цей набір "не прикольним", якщо усі його карти неможна викласти в одну стопку за такими правилами:

1) перша карта вибирається довільною;

2) кожна наступна карта повинна бути тої самої масті або тої ж величини, що й попередня, або бути тузом;

3) після тузу можна класти будь-яку карту.

Знайдіть найбільше к, для якого існує "не прикольний" набір з к карт.

8.(679) У трикутнику ***ABC*** позначимо через M_a, ***Мь*** і M_c середини сторін ***ВС, СА*** і ***АВ*** відповідно. Відомо, що ***ZM***$_a$***AC + ZMbBA+ +ZM***$_c$***CB = /M***$_a$***AB + ZM***$_b$***BC+ ZM***$_c$***CA.*** Довести, що трикутник ABC - рівнобедрений.

9.(680) Визначити, чи існують такі натуральні *а* і Ь, що для будь-якого натурального п число $Ь^п$ — п не ділиться на о?

10.(681) Довести, що в різносторонньому трикутнику пряма ІК паралельна прямій NJ, де:

І - центр вписаного кола;

К - точка Лемуана - точка перетину прямих, що проходять через вершини трикутника і ділять протилежні стороні пропорційно квадратам довжин прилеглих сторін;

N - точка Нагеля - точка перетину прямих, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику зовнівписаних кіл зі сторонами;

З - точка Жергона - точка перетину прямих, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола.

Математичний бій 5

(2 листопада 2007 року)

Молодша ліга

1.(682) У шаховому турнірі кожні два гравці грали між собою не більше одного разу. Після того, як кожен з учасників зіграв рівно по дві партії, п'ятеро гравців відмовилося брати участь у турнірі. Відомо, що зіграні були 100 партій. Знайти початкову кількість шахістів, що брали участь у змаганні.

2.1.(683) Задане ціле число й. Розглянемо множину цілих чисел **5** = $\{m^2 + <1n^2\backslash m, n$ **Є** $Z\}$. Візьмемо числа *р,* **д Є 5** такі, що *р* - просте, **а г = — - ціле.** Довести, що **г Є 5.**

V

2.2.(684) Натуральні числа *а, Ь, с, й* задовольняють умову: *а<1 —* $Ь^2$ *+Ьс + <?.* Довести, що число $a^2 + Ь^2 + c^2$ *+ (Р* складене.

3.(685) Є сім жетонів з цифрами 1,2,3,4,5,6,7. Довести, що будь-які два семизначних числа, що складені з цих жетонів, не діляться одна на інше.

4.(686) Для невід'ємних чисел *х, у, г,* що задовольняють умову *х + у + г —* 1, довести нерівність:

^ (1 - *х)(1 - у)(*1 - *г)* > *хуг(1* + я)(1 + і/)(1 + *г).*

5.(687) У трикутнику *АВС* провели медіану А£), бісектрису *BE* і пряму Сґ, що перетинаються в одній точці (точка ґ лежить на стороні *АВ).* Виявилося, що *BE* серединний перпендикуляр до відрізка *АИ.* Довести, що Сі*[1] > *BE.*

6.(688) Знайти всі дійсні числа *х,* для яких виконується рівність: **2х + 1** **+** 4я + 5 / **6** *7х-8* / 9 -, де [ж] - ціла частина числа.

7.1.(689) Знайти найбільше натуральне число, що не перевищує 10000 і яке дорівнює сумі факторіалів усіх своїх цифр.

7.2.(690) Знайти всі трицифрові числа, що дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.

8.1.(691) Олексій грає у гру з рівностороннім трикутником, викладеним з -?i(?i — 1) монеток (на стороні лежить п монеток). Спочатку всі монети перевернуті гербом догори. Дозволяється перевертати довільні три монети, що попарно дотикаються між собою. Олексій хоче перевернути всі монети гербом донизу. При яких п він це зможе зробити.

8.2.(692) Позначимо через *а* найменшу кількість кругів радіуса 1, якими можна повністю покрити даний многокутник М, через Ь - найбільшу кількість кругів радіуса 1, що не перетинаються, з центрами всередині многокутника М, Що більше: *а* чи 6?

9.1.(693) Дано опуклий чотирикутник *ABCD,* у якому */ACB* = = *Z.ADB, AB* = *AD.* Нехай *N* і *К* - основи перпендикулярів, опущених з А на прямі *CB* і *DB,* відповідно. Довести, що пряма *NK* перпендикулярна до прямої АС.

9.2.(694) Точки if і I на сторонах АВ і АС гострокутного трикутника *ABC* такі , що *KL* паралельна *BC.* *M* - точка перетину перпендикулярів, проведених через точки *К* і *L* до відрізків *AB* і *AC* відповідно. Довести, що *A, M* і центр *O* описаного кола трикутника АВС лежать на одній прямій.

10.(695) На засіданні присутні п людей. Довести, що при будь-якій кількості учасників може трапитись так, що ніякі троє не мають однакову кількість знайомих.

Старша ліга

1. Дивись задачу № 684.

2.1.(696) Знайдіть усі функції / : М —> М, які для будь-яких дійсних *x,y* задовольняють умову: *f (x* + cos(2007y)) = *f(x)* + 2007 cos (*f(y)*).

2.2.(697) Для гострих кутів *x, y* розглянемо кожну з рівностей: sin *2x* sin(2y + *x)* = sin 2*y* sin(2.r + *y)*

та cos *2x*cos(2*y* + *x)* = cos 2*y* cos(2x + *y).*

З якої з них випливає, що *x* = *y?*

3.1.(698) Задано опуклий чотирикутник *ABCD,* у якому *ZBAD* = = */.BCD.* З точки *B* опустили перпендикуляр *BH* на пряму *AD,* а з точки *D* - перпендикуляр *DK* на пряму *BC.* Нехай *Q* - середина діагоналі *AC,* Доведіть, що точки *Q, H* і *К* лежать на одній прямій.

3.2.(699) Нехай *AG* і *BH* - висоти, *AL* і *BK* - бісектриси трикутника *ABC.* Відомо, що *AG* = *BK* та *BH* = *AL.* Чи випливає звідси, що трикутник ABC рівносторонній?

4.(700) Вимикачі Pi, Pr, •••• *РП* деяким чином з'єднані з лампами Li, £2, при цьому кожен вимикач контролює стан кожної лампи, з якою він з'єднаний. Відомо, що кожен вимикач $P_Г$ обов'язково з'єднаний з лампою Li, і, крім того, якщо вимикач P* з'єднаний з лампою Lj, то вимикач Pj обов'язково з'єднаний з лампою $Ь_г$. В початковий момент усі лампи вимкнені. Доведіть, що шляхом деяких маніпуляцій з вимикачами можна добитись того, що все лампи будуть горіти.

5.(701) Знайдіть усі пари натуральних чисел (т,?г), для яких виконується таке твердження: $п^т = m^{5ü}$.

6.(702) Знайдіть мінімальне число а, при якому для будь-яких $x, y, z,$ не усі з яких додатні, виконується нерівність:

$$ce(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1)(z^2 - г + 1) > (xyz)^2 - xyz + 1.$$

7.(703) На сторонах AB і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовані трикутник ABX і ACY таким чином, що кути $ZXAB$ і $ZYAC$ фіксовані і $ZXBA + ZYCA = 180°$. Доведіть, що усі прямі XY проходять через фіксовану точку.

8.(704) Коло називається "добре пофарбованим", якщо вершини будь-якого рівностороннього трикутника, вписаного в це коло, пофарбовані в різні кольори. Нехай w - коло радіуса 2.

а) Чи існує таке пофарбування точок замкнутого круга, обмеженого колом *w,* у три кольори таке, що *w* і будь-яке коло з радіусом більшим або рівним 1, яка дотикається до кола *ги,* є "гарно пофарбованим"?

б) Чи існує таке розфарбування для семи кольорів?

9.(705) Послідовність аі будується наступним чином: аі = <22 = = ... = а2оо7 = 0, а для п > 2007 о„ дорівнює найменшому цілому невід'ємному числу, яке не трапляється серед чисел а„_і + аь $а_{п\_2}$ + 02, Довести, що $(а_г)$ - періодична, починаючи з деякого місця.

10.(706) Знайти усі натуральні числа п такі, що існує перестановка о множини {1,2,..., ?г}, для якої число \J<т(1) + *а(2)* + *\J...* + *\fo(n)* - раціональне?

Бліц

На II турнірі бліц грали двічі, одного разу у півфіналі в молодшій лізі дві команди з'ясовували між собою переможця. Іншого разу у старшій лізі три команди, що набрали однакову кількість очок, з'ясовували, розподіл місць в групі з 2-го по 4-те.

Молодша ліга

1.(707) У прямокутнику 3 х 3 розміщено міни. Відкрили три клітинки. Там мін не виявилось і відомо, що клітинках сусідніх (у кожної клітинки 8 сусідніх) до них стільки мін, скільки написано на малюнку (рис. 19). Скільки існує способів розташувати мін?

Рис. 19

2.(708) Знайдіть чотири різних простих числа менші за 100, які є дільниками числа $3^{32} — 2^{32}$.

3.(709) В трикутнику ABC довжини сторін є цілими числами, *AC* = 2007. Бісектриса кута *A* перетинає сторону *BC* в точці *D*. Відомо, що *AB* = *CD*. Знайдіть сторони трикутника.

4.(710) Розв'язати рівняння в натуральних числах $\frac{1}{X}\text{I}\frac{1}{y} = \frac{2}{1o}$.

5.(711) Яку найменшу кількість множників треба викреслити в добутку 1 х 2 х 3 х ... х 99 , щоб добуток чисел, що залишилися, закінчувався на 2?

6.(712) Знайдіть мінімальне значення виразу $\mathbf{ж}^2 + \mathbf{9}y^2 -+ \mathbf{4г}^2$, якщо відомо, що $X + y + Z — 1$.

7.(713) Знайдіть хоча б один розв'язок ребусу

SIX + SIX + SIX = NINE + NINE,

де різним буквам відповідають різні цифри, а однаковим - однакові.

8.(714) Розв'язати рівняння $x^2 + y^2 + 5 = 2x + 4y$.

Старша ліга

1. Дивись задачу № 708.
2. Дивись задачу № 709.

3.(715) Розв'язати рівняння $\mathbf{[ж]^2 + [ж] = x^2 —}$

4.(716) На площині дано правильний 2007-кутник. Для точки *Р* на площині, позначимо *Я(Р)* - суму відстаней від *Р* до прямих, що містять сторони 2007-кутника, а через *У(Р)* - суму відстаней від *Р* до вершин 2007-кутника. Знайдіть ГМТ на цій площині, для яких

а) у(Р) - мінімальне; ***б)*** в(Р) - мінімальне.

5.(717) Знайдіть всі цілі числа п, для яких $п^4 — 2п^3 + 4п^2 — 2п + 1$ є квадратом цілого числа.

6.(718) Число 916238457 є прикладом числа, у якого всі цифри від 1 до 9 присутні рівно один раз, цифри від 1 до 5 йдуть в порядку зростання, а цифри від 1 до 6 не йдуть в порядку зростання. Скільки всього існує таких чисел?

7.(719) Знайдіть максимальне значення виразу $а^2 + Ь^2$ якщо відомо, що $а^2 + Ь^2 + аЬ = а + Ь$.

8.(720) У прямокутнику 5 х 3 розташовані міни. Відкрили дві клітинки. Там мін не виявилось і відомо, що клітинках сусідніх (у кожної клітинки 8 сусідніх) до них рівно по 3 міни (рис. 20). Скільки існує способів розташувати мін?

Рис. 20

Переможці математичної каруселі

Молодша ліга

I місце команда УФМЛ+Івано-Франківськ:

Шарган Микола, Здомський Іван, Абрамов Артем, Дем'янюк Віталій, Буник Олексій, Шарманський Ігор

II місце команда Харків+Донецьк:

Жениленко В'ячеслав, Теплова Дар'я, Хрущов Тимур, Родіонов Сергій, Грувер Євген, Матвієвський Митрофан, Лисичкін Сергій

III місце команда Лідер-9:

Черненко Іван, Назарова Дарина, Зінченко Артем, Мороз Антон, Сохань Ігор, Веклич Богдан, Чорний Максим

Старша ліга

I місце команда Донецьк+Миколаїв:

Міщенко Павло Чихрадзе Кирило, Ілларіонов Антон, Шабала Микита, Кравецький Андрій, Маркелов Стас, Кирилюк Володимир

II місце команда № 208-II+Черкаси:

Лепех Сергій, Сенін Віталій, Кашпур Руслан, Рогулін Андрій, Пархомчук Дмитро, Медвенок Іван, Чурпіта Роман, Харламов Іван

III місце команда Львів+Харків:

Лисакевич Анастасія, Добосевич Олесь, Калашник Владислав, Макарець Олександр, Райновський Ігор, Бойко Тарас, Королюк Марія

Переможці турніру математичних боїв

Молодша ліга

I місце команда Лідер-9

II місце команда Харків+Донецьк

III місце команда Наукова зміна+Ужгород:

Харчун Володимир, Садовенко Оксана, Ольгашко Олександр, Ярмоленко Юлія, Данилевський Володимир, Гуйван Богдан

Старша ліга

I місце команда Лідер 11:

Могильний Сергій, Толмачов Констянтин, Шишацький Юрій, Сусла Євген, Моравецька Катерина, Семікіна Юлія, Мельник Володимир

II місце команда ХарківЧ-Львів

III місце команда № 208-1:

Бондар Денис, Сердюк Назар, Охонько Дмитро, Павлик Богдан, Макаров Микита, Сорока Богдан

Третій Всеукраїнський турнір математичних боїв імені члена-кореспондента НАНУ Ядренка М. И.

Третій Всеукраїнський турнір математичних боїв імені Ядренка М. Й. відбувся з 2 по 10 листопада 2008 року на базі Київського національного університету імені Тараса Шевченка та Українського фізико-математичного ліцею при КНУ імені Тараса Шевченка. Змагання - проведено у двох лігах - старшій (10-11 класи) та молодшій (8-9 класи). Внаслідок збільшення кількості учасників та інших причин програма набула такого вигляду.

2 листопада був заїзд учасників змагань, а також проведені відкриття турніру та перше командне змагання - математична карусель. 3 листопада була проведена командна олімпіада. 4, 5 та 7-9 листопада проведено 5 турів боїв, за результатами яких і були визначені переможці турніру. 6 листопада - день відпочинку, під час якого учням була запропонована екскурсія містом та відвідування матчу Ліги чемпіонів з футболу між командами "Динамо" (Київ, Україна) та "Порто" (Порту, Португалія). 10 листопада було закриття турніру, підведення підсумків та роз'їзд учасників по домівках. Виходячи з кількості учасників, у кожній лізі була запропонована своя схема для проведення змагання. У молодшій лізі 8 команд за результатами командної олімпіади були розбиті на 2 групи по 4 команди. Після змагань в групах були проведені півфінали, а в останній день - фінальні бої за 1-8 місця. У старшій лізі внаслідок непарної кількості команд (15), турнір - проведено за швейцарською системою з послідовним відпочинком усіх київських команд.

<u>Математична карусель</u>

На Всеукраїнському турнірі карусель тривала протягом 2 годин, на вихідному рубежі учасникам було запропоновано 14, а на заліковому 20 завдань. За результатами каруселі було сформовано групи.

<u>Молодша ліга</u>

Вихідний рубіж

1.(721) Точки *A* та *B* мають на числовій прямій координати 1 і 2008 відповідно. Знайти координати точок, які поділяють відрізок *AB* на 2 частини, одна з яких у два рази довше за іншу.

2.(722) Знайти усі прості *p < <? <г,* для яких *рдг = 5(р + д + г).*

3.(723) Знайдіть найменше чотирицифрове натуральне число, яке складається з різних цифр та ділиться на кожну свою цифру.

4.(724) У класі кожний хлопчик дружить з трьома дівчинками, а кожна дівчинка - з двома хлопчиками. В класі 19 парт та більше ЗО учнів. Скільки учнів у цьому класі?

5.(725) Довжинами сторін трикутника є послідовні цілі числа. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо відомо, що одна з його медіан перпендикулярна одній з його бісектрис.

6.(726) У мішку лежать 10 карток з цифрами 0,1,2,... ,8,9. Знайдіть найменше число п, таке що які б n карток ми з мішку не взяли, з деяких з них завжди можна скласти число, яке ділиться на 3.

7.(727) a < *Ъ* - двоцифрові числа, останні цифри яких збігаються. Відомо, що неповна частка від ділення а на 9 дорівнює остачі від ділення Ь на 9, а неповна частка від ділення Ь на 9 дорівнює остачі від ділення а на 9. Знайти усі такі пари чисел а та Ь.

8.(728) У скількох трицифрових чисел середньою цифрою є 0?

9.(729) Відомі деякі попарні відстані (по прямій) між містами *А, В,С,Б* і *Е* : *АВ* = 30 км, *ВС* = 80 км, *СБ* = 236 км, *БЕ* = 86 км, *ЕА* = 40 км. Знайти *ЕС.*

10.(730) Знайти кількість двоцифрових чисел n, таких, що n^n є повним квадратом або повним кубом.

11.(731) Прямокутник 24 **x** 60 розбитий прямими, паралельними його сторонам на одиничні квадрати. На скільки частин розіб'ється цей прямокутник, якщо у ньому провести ще й діагональ?

12.(732) Батькові 41 рік, старшому сину 13 років, дочці - 10 років, а молодшому синові 6 років. Через скільки років вік батька буде рівним сумі віків його дітей?

13.(733) З пункту *А* у пункт *В* вийшли 2 людини. Перша йшла по шосе зі швидкістю 5 км/год, а друга стежкою зі швидкістю 4 км/год. Перша з них прийшла до пункту *В* на годину пізніше й пройшов на 6 км більше. Знайти відстань від Л до В по шосе.

14.(734) У трикутнику *ААВС* кут при вершині *С* - прямий, а */ВАС* — 20°. Знайти кут між висотою та медіаною, що проведені з вершини *С.*

Заліковий рубіж.

1.(735) У 2008 році людині виповнилось n років, що на 1 менше суми цифр року його народження. У якому році він народився?

2.(736) Скільки існує пар цілих чисел *(x,y),* для яких

200|ж| + 8|у| = 2008?

3.(737) Деяку роботу вміють виконувати троє робітників. Другий та третій можуть разом виконати її у два рази швидше першого, перший та третій можуть разом виконати її у три рази швидше другого. У скільки разів перший та другий можуть разом виконати цю роботу швидше, ніж третій?

4.(738) Натуральні числа a,Ь,c такі, що — +^ + — < 1. Знайти
a b c
найбільше значення цієї суми дробів.

5.(739) По колу виписані 100 цілих чисел, сума яких дорівнює 1. Ланцюжком назвемо декілька чисел, які стоять поспіль. Знайти максимально можливу кількість ланцюжків, сума чисел у яких додатна.

6.(740) Скільки існує способів поставити на шахівницю трьох коней так, щоб вони били максимально можливу кількість клітин (вважаємо, що кінь також б'є і клітину на якій знаходиться й сам).

7.(741) При якому найменшому натуральному $N > 1$ число $N^3 - N$ ділиться 2008?

8.(742) За довгим столом у ряд розставлені 9 стільців, що передбачені для трьох вчителів та шести учнів. Вчителі приходять першими. Скількома способами вони можуть сісти за стіл таким чином, щоб після того, як розсядуться учні, кожен вчитель сидів поміж двома учнями?

9.(743) Знайти суму цифр числа 2008 • ІЬЛ .
2008

10.(744) Знайти периметр паралелограма *ABCD,* якщо відомо, що бісектриса кута *A* поділяє сторону *BC* на відрізки довжиною 3 см и 5 см.

11.(745) Три стрільці Іванов, Петров і Сидоров зробили по 6 пострілів по одній мішені й вибили порівну очкок. Відомо, що Іванов за перші 3 постріли вибив 43 очки, а Петров першим пострілом вибив З очки. Вкажіть, скільки очкок вибив кожний стрілець кожним своїм пострілом (у порядку незростання), якщо відомо, що у 50 було одне влучення, в 25 - два влучення, в 20 - три влучення, в 10 - три, в 5 - два, в 3 - два, в 2 - два і в 1 - три влучення.

12.(746) Сума цифр десяти цифрового числа дорівнює 4. Чому може дорівнювати сума цифр квадрату цього числа?

13.(747) Знайти усі такі трицифрові числа *abc.* що

$$abc = 2\ (ab + bc + \hat{a}c)\ .$$

14.(748) На острові живуть лицарі, які завжди кажуть правду, і брехуни, які завжди брешуть. На цьому острові утворилась черга з 26 людей. Кожен з них каже, що прямо ним у черзі стоїть брехун. Скільки брехунів у черзі? (Вказати усі відповіді).

15.(749) На старті перебувають три спринтери *А, В, С.* Відомо, що С пішов зі старту не першим, а далі він обганяв або його обганяли рівно 6 разів протягом усієї дистанції. *В* пішов зі старту пізніше *А.* В процесі бігу А обганяв чи його обганяли 5 разів. Відомо, що до фінішу *В* дістався раніше *А.* У якому порядку спринтери прийшли до фінішу?

16.(750) Знайти 5 чисел, попарпі суми яких дорівнюють: 0,2,4,5,7,9,10,12,14,17.

17.(751) З цифр 1,2,3,4 складаються всілякі додатні десяткові дроби з одним, двома чи трьома десятковими знаками, які містять кожну з цих цифр по одному разу. Знайти суму вказаних дробів.

18.(752) Андрій веде машину зі швидкістю ЗО км/год. Він хоче проїздити кожний кілометр на 1 хвилину швидше. На скільки йому треба збільшити швидкість?

19.(753) Число 13^{101} записали у трійковій системі числення. Знайти дві останні цифри у цьому запису.

20.(754) З усіх десяти цифр, використовуючи кожну рівно 1 раз, утворили два натуральних числа. Яке мінімальне значення може приймати модуль їх різниці?

Старша ліга

Вихідний рубіж

1. Дивись задачу № 724.

2. Дивись задачу № 722.

3. Дивись задачу № 730.

4. Дивись задачу № 726.

5. Дивись задачу № 721.

6. Дивись задачу № 741.

7.(755) Розв'яжіть наступну систему рівнянь відносно змінних *х, у* Є К **з параметрами** *а* Є К\{0} , *Ь* Є *R* : $\begin{cases} x^2 + xy = a^2 + ab, \\ y^2 + xy = a^2 - ab. \end{cases}$

8. Дивись задачу № 753.

9. Дивись задачу № 752.

10. Дивись задачу № 731.

11.(756) Відомо, що у рівнобедреному *ААВС АВ = ВС = а, АС = Ь, АК* і *СЬ* - бісектриси цього трикутника. Знайти довжину відрізку *КЬ.*

12. Дивись задачу № 744.

13.(757) Знайти усі додатні корені рівняння X^x =

у/2

14.(758) Які числа можуть бути поставлені замість *к,* щоб наступна задача мала єдиний розв'язок: "На площині розташовано п прямих, які перетинаються в *к* точках. Знайти *п* ."?

Заліковий рубіж

1. Дивись задачу № 735.

2. Дивись задачу № 736.

3.(759) Знайти усі розв'язки рівняння: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ на інтервалі (0,7г).

4.(760) В олімпіаді, в якій взяло участь 24 школярі, було запропоновано три задачі, і кожний школяр розв'язав принаймні одну задачу. Відомо, що учнів, які розв'язали другу задачу, але не розв'язали першу, у півтори рази більше, ніж тих, хто розв'язав третю задачу і не розв'язав першу. Також відомо, що учнів, що розв'язали тільки першу задачу, на 1 більше, ніж тих, хто окрім першої задачі розв'язав ще якусь задачу. І нарешті відомо, що серед тих, хто розв'язав тільки одну задачу, половина розв'язала першу задачу. Скільки школярів розв'язало тільки другу задачу?

5.(761) Сторони *ААВС* продовжили таким чином: *АВ* заточку *В* на відрізок *ВАі = 2АВ,* сторону *ВС* за точку *С* на відрізок *СВі = АВС,* сторону *СА* за точку *А* на відрізок *АСі = 7СА.* У скільки разів площа ААіВіСі більше площі ААВС?

6.(762) Знайти кількість натуральних чисел *n* > *2,* які не перевищують 100 та мають таку властивість: якщо натуральне число *m* взаємно просте *з n і 1 < m < n, то m* - просте число.

7.(763) Сума двох натуральних чисел дорівнює 2008. Якщо у одного з них закреслити останню цифру, то вийде друге число. Знайти усі такі пари чисел.

8. Дивись задачу № 737.

9.(764) Коло, що вписане у А*ABC,* поділяє його сторону *AB* на відрізки *АБ* = 5 та *БВ* — 3, */А* = 60°. Знайти довжину *ВС.*

10.(765) В абетці племені Мумба-Юмба чотири різні букви. Словом у мові цього племені є будь-яка послідовність букв, яка задовольняє такі умови: в ній немає двох однакових букв, що стоять поряд, та з неї не можна за допомогою викреслювання деяких букв одержати послідовність типу *аЬаЬ* (тут букви *а, Ь* різні). Скільки існує п'ятибуквених слів у мові цього племені?

11.(766) У одноколовому шаховому турнірі Петро набрав у 10 разів більше, ніж Василь, при цьому Василь набрав додатну кількість очок. При якій найменшій кількості учасників турніру таке могло статися.

(перемога - 1 очко, нічия - —, поразка - 0 очок).

12.(767) Сума усіх плоских кутів при усіх, крім однієї, вершинах даного опуклого багатогранника дорівнює 5160°. Чому дорівнює сума усіх плоских кутів цього багатогранника?

13. Дивись задачу № 743.

14.(768) Точка *В* лежить на прямій *АС* між точками *А* і *С.* У півплощині з межею *АС* вибрані такі точки *К,Н,* що *АК* = *КВ, ВН* = *НС, /АКВ* = 70°, */ВНС* = 110°. Знайти кути *АКНМ,* де *М* - середина *АС.*

15.(769) Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} 1+a+b=ab, \\ 2+a+c=ac, \\ 5+b+c=bc. \end{cases}$

16.(770) Скільки існує перестановок (а, *Ь, с,в,*) цифр (1,2,7,9) таких, що число 1729! ділиться на $(10а + Ь)^{10c+<1}$?

17.(771) У гострокутному *ААВС* на стороні *ВС* вибрана точка *N :* ВЛГ *: ИС* = 2:3. На відрізку *АИ* вибрана точка *М,* з якої опущені перпендикуляри *МР* і на відрізки *АВ* і *АС* відповідно. Відомо, що *АВ* = 7, *АС* = 9 и *МР* + *МС}* = 2. Знайти величини відрізків *МР*

та *MC}*.

18. Дивись задачу № 740.

19. Дивись задачу № 742.

20.(772) Скільки існує натуральних чисел $N < 1000000$ таких, шо N ділиться на , де [.т] - ціла частина числа x.

Командна олімпіада

Молодша ліга

1.(773) ***а)*** Довести, що можна виписати в ряд усі натуральні числа від 1 до 16 так, щоб сума будь-яких двох сусідніх чисел була повним квадратом.

б) Чи можна це зробити, якщо числа виписувати по колу?

2.(774) Відомо, що вісім рівнянь $x^2 + aiX +$ **Ь**$i = 0$, $i = 1,8$ мають спільний корінь $x = 2$, а сума інших коренів дорівнює 2008. Довести, що обидва корені рівняння аг^2 Н $\overline{\text{аі + ... + а}_8}$ x -\ $\overline{\text{Ьі + ... + Ь}_8}$ = 0 є простими числами.

3.(775) Нехай *АВСБ* - трапеція, у якої *АБ* = а, *АВ* = 2а, *ВС* = За і */.А = АВ* = 90°, точки *Е* і Р - середини бічних сторін *АВ* і *СБ, О* - середина *ЕР.* З точки і*^{1} опустили перпендикуляр *РК* на сторону *ВС.* Довести, що прямі *АР, БК* і *БО* перетинаються в одній точці.

4.(776) Нехай $xi < x_2 < ... < x_{102} < 254$ - натуральні числа. Довести, **ЩО** серед чисел **сії** *= X2~Xi* , *СІ2 = ХЗ — Х2,* **..., с**/іоі = **я 102 — ^101** принаймні 26 рівних.

5.(777) Знайти усі натуральні числа *а* і *Ь,* для яких вираз

Ь^2 + аЬ + а + Ь + 1

а^2 + аЬ + 1

є цілим числом.

6.(778) Три шахові команди, в кожній з яких по 10 чоловік, беруть участь у турнірі, що відбувається за такою схемою. В кожній грі між собою грають два учасники з різних команд, причому будь-які два учасники з двох різних команд обов'язково зіграють у турнірі лише один раз. Довести, що після 201 гри знайдуться 3 спортсмени, кожні двоє з яких зіграли між собою.

7.(779) Для довільних а, 6 Є [0,1] довести нерівність:

1 ^ *а + Ь* *аЬ*

а + Ь 4-1 ~ *2~* $^+$ У'

8.(780) Нехай *Р* - довільна точка сторони *АВ* рівностороннього трикутника *АВС, к* і &2 - кола вписані в трикутники *АРС* і *ВРС* відповідно. Спільна внутрішня дотична до і відмінна від СР, перетинає *АВ* в точці Довести, що розташування точки ф не залежить від вибору *Р.*

Старша ліга

1.(781) Петро і Данило мають потрапити з села до міста, яке знаходиться на відстані 15 км від села. Пішки вони можуть рухатись зі швидкістю 6 км/год. Крім того, в них є велосипед, на якому можна їхати зі швидкістю 15 км/год. Петро і Данило відправляються з села одночасно, Петро - пішки, а Данило "їде на велосипеді, до зустрічі з Василем, який іде з міста у село. Далі Данило іде пішки, а Василь їде на велосипеда до зустрічі з Петром, передає йому велосипед, на якому той і приїжджає у місто. Коли Василь повинен вийти з міста, щоб Петро і Данило прибули в місто одночасно, якщо пішки Василь іде з тією швидкістю, що і Петро з Данилом?

2.(782) Кожному натуральному числу *k, k > 2* ставиться у відповідність послідовність $a_n(к)$ за таким правилом: *ао(к) = к,* $a_n(к)$ = т($а_п$_і(&)) для *n* > 1, де через т(а) позначається кількість різних дільників числа *а.* Знайдіть усі *к,* для яких послідовність $a_n(к)$ не містить квадратів натуральних чисел.

3.(783) Всередині трикутника АВС взяли точку Р, таку що *ZPBC = ZPCA < ZPAB.* Пряма *ВР* перетинає коло, описане навколо *ААВС* у точках *В* та *Е.* Описане коло навколо А*АРЕ* перетинається з прямою СЕ в точках Е та *F.* Доведіть, що відношення площ чотирикутника *APEF* та трикутника *АВР* не залежить від точки Р.

4.(784) Знайдіть усі функції *f* : [0,1] —» [0,1], які задовольняють таким умовам /(0) = 0, /(1) = 1, *f{x + у) - f(x) = f{x) - f(x - у)* для будь-яких *х, у* > 0, таких що *(х — у), (х + у)* є [0,1].

5.(785) Нехай *S* - це коло і а = {Ах, ...,$А_п$] - сімейство відкритих дуг на *S.* Нехай *N(a) = n* позначає кількість елементів в *а.* Будемо казати, що а є покриттям $5^{і}$, якщо 5 С $\underset{\kappa=\mathrm{i}}{\overset{n}{\text{и}}}$ А^. Нехай а = {Лі, ...,$А_п$} і /3 = *{Bi,...,*B_m*}* - два покриття 5. Доведіть, що з сімейства всіх множин виду Аі П *В2*, *i* = 1, *TI, I* = 1, *т* можна обрати покриття 7 кола 5, таке що Щ-у) < Ы(а) + ыф).

6.(786) Нехай *а, Ь, с* додатні числа, довести нерівність:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1 \mp а}+\frac{1}{1+Ь}+\frac{1}{1+с\,7}\right) > \frac{9}{1 \mp abc}$$

7.(787) Для опуклого шестикутника А В С Б Е Р справджуються такі рівності: *АБ=ВС + ЕР, ВЕ = АР* + СД *СР = БЕ + АВ.* Доведіть, щ о т о д і т *АВ* = *СБ* = *ЕР* ш

8.(788) Нехай *а,Ь,с* - цілі числа, відмінні від нуля. Відомо, що рівняння $ах^2$ 4- $Ьу^2$ $+сг^2$ = 0 має цілий ненульовий розв'язок. Довести, що рівняння $ах^2$ + $Ьу^2$ 4- $сг^2$ = 1 має розв'язок у раціональних числах.

Математичні бог

Математичний бій 1

(4 листопада 2008 року)

Молодша ліга

1.(789) Є правильний 17-кутник Л1Л2...Л17. Відстань d^ між вершинами А*i* і *Aj* *(i ф j)* означимо як

$$d\hat{} = \min (\mathrm{I}j - 1 |\ 4\text{-}1,\ 18 - \mathrm{I}j - г|\}$$

тобто dij дорівнює найменшій кількості вершин між вершинами А*i* і *Aj,* включаючи їх самих, якщо йти вздовж межі багатокутника. Розфарбування 17-кутника назвемо бездоганним, якщо будь-які дві вершини, відстань між якими дорівнює або 3, або 5, або 9, зафарбовано різними кольорами. Скільки щонайменше потрібно кольорів для бездоганного розфарбування 17-кутника?

2.(790) Відомо, що для натуральних чисел *a, о, с* число $\frac{ay/3\ 4\text{-}\ b}{Ьу\ 3\ 4\text{-}\ c}$ ціле. Довести, що тоді цілим є і число $\frac{a^2\ 4\text{-}Ь^2\ 4\text{-}e^2}{a + b + c}$.

3.(791) Для додатних чисел *x,y,z* розв'язати систему нерівностей x^3y 4- 3 < 4z, j^z 4- 3 < *4x,* $z^3x + 3 < 4y$.

4.(792) У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом ZA точка М - середина сторони *ВС.* На промені *АС* вибрано таку точку *D,* що *AD = AM.* Нехай Р - точка перетину кіл, описаних навколо трикутників *АМС* і *BDC,* що відмінна від точки С. Довести, що СР - бісектриса кута *ZACB.*

5.(793) Лисиці, вовки і ведмеді організували велике полювання на кроликів. Усього в полюванні взяло участь 45 мисливців. Кожна лисиця вполювала 59 кроликів, кожен вовк - 41 кролика, кожен ведмідь - 40 кроликів; усі ж разом вони вполювали 2008 кроликів. Скільки серед мисливців було лисиць, вовків і ведмедів?

6.(794) Довести, що для довільного натурального $n > 2$ рівняння $1+x^2+x2 + — + x^2 — y^2$ має безліч розв'язків у натуральних числах таких, що $1 < xi < X2 < ... < x_n < y$

7.(795) Знайти найбільше дійсне число *р* та найменше дійсне число *q,* для яких нерівність $p < \frac{0 і\ "Шь}{O\text{-}f\text{-}Пд} < q$ справджується для довільного трикутника *ABC* зі сторонами *а,Ь* і відповідними медіанами m_a,*ть*-

8.(796) Нехай натуральне число *A* — aia2…aп-ia„. Розглянемо функцію f(A) = a„a„_i…a2ai (наприклад /(123) = 321, /(100) = 1). Розв'язати рівняння */(n)* = , де *n* - натуральне, а [ж] - найменше ціле число, що не менше за *x* (наприклад: [2,1] = 3, (V) = 4).

9.(797) Нехай A_n позначає кількість різних трійок *(a, Ь, c)* елементів з множини

A = {1,2,..., *n}* таких, що

(a — Ь)(Ь — c)(c *— a)* ^0 і (a + Ь + c):3.

Знайти всі п, для яких A_n = 16720.

10.(798) Богдан та Сашко грають у гру "Молодець". Вони по черзі вписують в різні клітинки дошки числа 1,2,..., 16 (в кожній клітинці дошки - одне число), причому числа у будь-якому рядку, стовпчику чи в 16 квадратах 4 на 4 різні (рис. 21). Програє той, хто не зможе вписати наступне число. Першим ходить Богдан. Хто має у цій грі стратегію, щоб виграти?

I-I | [I I I 1 1 I I I I I I I

I I I I I I I I I I I I I I I I

I I I I I I Ш_

1 1 1 1 1

I I I I I I I I I I I I I I I I

рuCш 21

Старша ліга

1.(799) Дев'ять міст зв'язані дорогами з одностороннім рухом. З кожного міста виходять три дороги якими можна виїхати в 3 інших міста. Довести, що існує круговий маршрут, узгоджений з напрямком руху і містить не більше ніж 3 міста.

2.(800) Дня довільних *x₁,X2, —,xₙ* Є [0,1) довести нерівність:

$$\frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)} > 1 + \frac{1}{1-xi} + \left(\hat{O}\frac{''}{2-xi-x_2}\hat{y}\right)^2 + \left(\frac{''TVXn}{TI\ X\ X2\ \ldots\ X_n}\right)'$$

3.(801) На початку гри на столі міститься m червоних та п зелених фішок. Дмитро та Євген роблять ходи по черзі. Кожним своїм ходом гравець вибирає колір і забирає зі стола k фішок цього кольору, причому k повинно бути дільником кількості фішок іншого кольору, які в даний момент є на столі. Виграє той, хто забере зі стола останню фішку. Починає Дмитро. Хто з хлопців може забезпечити собі виграш при правильній грі?

4.(802) Опишіть усі замкнені обмежені фігури Ф на площині, кожні дві точки яких можна з'єднати півколом, яке цілком належить Ф.

5.(803) Дня кожного натурального *TI* позначимо через *M(n)* кількість натуральних розв'язків рівняння $x^2 + y^2 = mг^2$. Доведіть, що існує натуральне число ш, що для усіх $n > m$ виконується нерівність:
M(n) **1**

n **2008²⁰⁰⁸,**

6.(804) Космічна станція має форму квадрата *n* х *тг, тг* > З поділенного на п^2 відсіків розміру 1 x 1. Відсіки є суміжними, якщо мають спільну сторону. У першій день інопланетяни захопили деякі п відсіків, а потім кожного наступного дня захоплюють усі вільні відсіки, для яких принаймні два сусідні відсіки вже захоплено. Чи може трапитись, що після **2** дня ще залишаються вільні (не захоплені) відсіки, але врешті-решт усю станцію буде захоплено? Тут [а] - ціла частина числа *а.*

7.(805) Дано гострий кут з вершиною *О.* На одній стороні обрано довільні точки *А, Б,* на іншій - *В, С.* Нехай *М, N* - середини відрізків *АВ* і *СБ* відповідно. *К* - точка перетину дотичних до описаного кола трикутника *ОАВ* в точках *А* і *В* ; *Ь* - точка перетину дотичних до описаного кола трикутника *ОСБ* в точках *С* і *Б.* Довести, що відношення ***КЬ*** не залежить від вибору точок *А, В, С, Б.*

8.(806) Розв'язати рівняння:

$$[x^2 - 1] + M = [X^3] + [2a:],$$

де [ж] - ціла частина х.

9.(807) Два кола дотикаються одне до. одного внутрішнім чином і рівносторонній трикутник вписане у більше з них. З кожної вершини цього трикутника провели один з відрізків дотичної до меншого кола. Доведіть, що довжина одного з цих відрізків дорівнює сумі довжин двох інших.

10.(808) Знайдіть усі функції / : (0,+oo) —> (0,+oo), які Ух > 0 задовольняють таку умову: / (/(*x*) — *x) — 6x.*

Математичний бій 2
(5 листопада 2008 року)

Молодша ліга

1.(809) У волейбольному турнірі беруть участь $n > 2$ команд. За перемогу нараховується 1 очко, за поразку - 0 (нічиїх не буває). У турнірі кожна команда грає з кожною, причому лише 1 раз. Знайти усі значення *n,* при яких можливий такий випадок, що:

а) кожна команда набрала непарну кількість очок;

б) кожна команда набрала парну кількість очок.

2.(810) Для будь-якого натурального числа m > 1 визначимо ***f(m)*** як суму усіх натуральних чисел, що менші за m та взаємнопрості з m Знайти усі натуральні тг, для яких існують такі натуральні числа k і I, що / $(тг^к) = тг^1$.

3.(811) Відомо, що для послідовності дійсних чисел (a_n) нерівність $|a_{п+}і — a_п| < 1$ справджується для усіх натуральних *n.* Нехай $b_n = Yii^a i$ + «2 + ••• + $a_n)$. Довести, що тоді $|6_{п+}і -Ь_n\backslash <$ - для усіх $n \in N$.

4.(812) У зв'язку з економічною кризою американський долар хочуть замінити на соверен. Один соверен буде складатися із 100 пенні. Для пенні будуть введені монети трьох номіналів. Знайти усі такі номінали монет, для яких виконується наступна умова: маючи к монет цих номіналів (декілька першого, декілька другого та декілька третього, разом к монет), можна було б купити будь-який товар вартістю від 1 до 99 пенні, а маючи уже (к — 1) монету будь-якого номіналу, цього зробити було б не можна.

5.(813) Знайти усі трійки *а,Ь,с* дійсних чисел, які задовольняють умову: кожне з рівнянь: $x^3 + (a + 1)x^2 + (Ь + 3)ж + (с + 2) — 0,$ $ж^3+(а+2)а:^2+(Ь+1)а:+(с+3) = 0$, $ж^3+(а+3)а:^2+(Ь+2)а:+(с+1) = 0$ має три різні дійсні корені, але усі ці дев'ять коренів утворюють множину з п'яти чисел.

6.(814) Кола кі і $к_2$ з різними радіусами дотикаються зовнішнім чином у точці *Т.* На колах *кі* і $к_2$ візьмемо відповідно точки *А і В,* обидві відмінні від *Т* і такі, що кут $AATB = 90°$. Знайти геометричне місце середин усіх таких відрізків АВ.

7.(815) Знайти всі трицифрові числа *abc* такі, що $\frac{abc}{}$ - ціле число.

8.(816) 111 монет хочуть розмістити в клітинках дошки *пхп* таким чином, щоб кількість монет у будь-яких двох сусідніх клітинках (тобто тих, що мають спільну сторону) відрізнялася на 1 (клітинка може містити декілька монет і може не містити жодної). Для якого найбільшого тг де можливо зробити?

9.(817) Бісектриса кута */.BAC* трикутника *ABC* перетинає сторону *BC* в точці *E*, а зовнішня бісектриса кута */ACB* перетинає промінь *BA* в точці *F.* Виявилося, що довжина відрізка *AF* дорівнює периметру трикутника ACE. Знайти відношення */BAC*

10.(818) *N* кіл на площині розміщено таким чином, що існують шість точок таких, що кожна точка належить принаймні трьом колам. Яке найменше значення *N?*

Старша ліга

1.(819) Нехай *ABC* - прямокутний трикутник з прямим кутом */B* і *AB* > *BC.* Нехай Г - півколо з діаметром *AB,* яке розташоване в одній гіівплощині з точкою *C* відносно прямої *AB.* Позначимо через *P* Є Г таку точку, що *BP* = *BC.* а через ф Є *AB* таку точку, що *AP* = *AC*З- Доведіть, що середина *C(2* належить півколу Г.

2. Дивись задачу № 811.

3.1.(820) Довести, що нерівність 1 a < (I+б)""1 виконується для усіх додатних **а** ф. 1 та для а Є (0,1].

3.2.(821) Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9, \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18. \end{cases}$$

4.1.(822) На вечірці, яку відвідали *п* подружжів, кожна людина розмовляла з усіма крім своєї половини (чоловіка чи дружини). Розмови відбувалися в групах Сь С2,..., С^, причому для цих груп справджуються наступне: ніяке подружжя не є членами однієї групи, але для кожної іншої пари людей існує рівно одна група, до якої ці люди належать одночасно. Доведіть, що якщо *п* > 4, то *к* > *2п.*

4.2.(823) Розв'язати в цілих числах рівняння:

$$x + x^2 + x^3 + X^i + x^ь - y^3 + 2.$$

6.(824) Довести, ідо в різносторонньому трикутнику точка Нагеля Н, точка Жергона •/ та точка перетину антибісектрис Б лежать на одній прямій, де точка Нагеля - це точка перетину прямих, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику зовнівписаних кіл зі сторонами; точка Жергона - це точка перетину прямих, що з'єднують вершини трикутника з точками дотику вписаного кола; антибісектриса - це відрізок, що з'єднує вершину трикутника з точкою, симетричною основі бісектриси відносно середини сторони.

6.(825) Знайдіть усі функції / : (0, +оо) —> (0, +оо) такі, що *Ух, у* > 0 виконується умова: / (/(з.) 4- *у)* = ж/(1 + *ху).*

7.(826) На вертикальній площині розташована скінченна кількість відрізків, які не мають спільних точок. Доведіть, що з них можна обрати такий відрізок, який при падінні вертикально вниз на зачепить інші відрізки.

8.1.(827) Дано натуральне число с, послідовність (а„) задається такими умовами: *а* = *с,* а„+і = $а^2$ 4- a_n + $с^3$, *п* Є *N.* Знайдіть усі с, для яких існують натуральні числа *кіт >2,* такі, що 4-$е^3$ є *т-*м степенем натурального числа.

8.2.(828) Дані 2008 цілих чисел. Яке найбільше число попарних сум цих чисел може бути непарними числами?

9.(829) На площині є скінченна кількість кругів радіуса 2 см. Довести, що площа фігури, яка покривається цими кругами (у квадратних см), не менша за її периметр (у см).

10.1.(830) Депутати міської ради ділили прибутки бюджету. Перший депутат вибив 1000 доларів та — доходів, що залишились, другий - 2000 доларів та доходів, що залишились, третій - 3000 доларів та доходів, що залишились, і т. д. Виявилось, що усі депутати поділили прибутки порівну. Скільки було депутатів?

10.2.(831) Нехай натуральне число *п* > 1. Визначимо послідовності *(x_n)* та *(y_n)* таким чином: *хі = п, уі* = 1, = \ >

Уг+1 [^Г+ї] Ловефъ, що тіпіяьжг, = [у/п\, де [а] - ціла частина числа а.

Математичний бій 3
(7 листопада 2008 року)

Молодша ліга

1.(832) Знайти найбільше значення натурального числа *x,* для якого $\mathbf{(2^{182} + 4^{x} + 8^{700})}$ - квадрат деякого натурального числа.

2.1.(833) Множина усіх додатних дійсних чисел розбита на три непорожні множини, що попарно не перетинаються.

а) Довести, що можна завжди вибрати три числа по одному з кожної підмножини так, шоб вони були сторонами деякого невиродженого трикутника.

б) Чи завжди можна вибрати три числа з трьох різних підмножин таким чином, щоб вони були сторонами деякого прямокутного трикутника.

2.2.(834) Аліночка та Лерочка грають у гру з парною кількістю карт. На кожній з них написано деяке натуральне число. Карти тасуються та розкладаються по колу так, що дівчата бачать числа, що написані на них. Першою починає Лерочка і бере собі довільну карту. Потім вони по черзі забирають собі карти, причому можна брати лише карту, що лежала ліворуч чи праворуч від взятої на попередньому кроці карти. Перемагає той, у кого сума чисел на картах більша. Довести, що Лерочка може забезпечити собі непрограш.

$$\left[\begin{array}{l} (x + y)^3 = z, \\ (y + z)^3 = X, \\ (z+xf=y. \end{array}\right.$$

4.1.(836) Нехай задано трикутник ***ABC*** та точку ***D*** на стороні ***BC*** таку, що ***AB + BD = AC + CD.*** Позначимо через ***X*** та У точки перетину прямої ***AD*** і вписаного кола трикутника ***ABC (X*** лежить між ***A*** та У), ***E*** - точка дотику цього кола до ***BC.*** Доведіть, що

а) пряма ***AD*** перпендикулярна ***EY ;***

б) XD — HA!, де I - центр вписаного кола, ***A! -*** середина ***BC.***

4.2.(837) У трикутнику ***ABC*** медіани ***AA*** та ***BBi*** перпендикулярні. Довести, що з медіан ***AA\, BBi*** та ***CCi*** трикутника ***ABC*** можна скласти прямокутний трикутник.

5.(838) Група складається з *n* > **2** студентів. Деякі з них товаришують між собою, причому у кожного є хоча б один друг. Довести, що групу можна розбити на підгрупи (як мінімум по **2** студенти в кожній) так, щоб у кожній підгрупі знайшовся студент який товаришує з рештою студентів цієї підгрупи.

6.1.(839) Про прості числа 5 *< p < q < г* відомо, що 2*p*^{2} — *г*^{2} > 49 та 2q^2 — г^2< 193. Знайти ці числа.

6.2.(840) Відомо, що натуральне число п у десятковому записі має 2008 одиниць, 2008 четвірок, а решта цифр є нулі. Чи може п бути повним квадратом?

7.(841) У гострокутному трикутнику *ABC* проведено висоти *AA\,* ***BB\,*** *CC\.* Нехай *Аь* - це проекція точки *А* на пряму *АС.* Визначимо аналогічним чином точки A_c, B_a, B_c, C_a, *Сь•* Доведіть, що всі ці точки лежать на одному колі.

8.1.(842) Знайти усі дійсні г, для яких нерівність

г{аЬ + Ьс + са) + (3 - *r)* *(- + \ + -)* > 9,
\а о с)

справджується для довільних додатних чисел *а, Ь, с.*

8.2.(843) Для довільних дійсних чисел *а* та *Ь* довести нерівність:

|*1+аЬ*| + |*а + Ь*| > *VK«*^{2} *- 1)(Ь*^{2} *~ 1)*|.

9.(844) Нехай дано купку зі ста монет. Розбиття цієї купки на k менших купок назвемо гарним, якщо виконуються умови: кількість монет в кожній купці різна та при розбитті будь-якої купки на дві менші знайдуться дві купки з однаковою кількістю монет. Знайти найбільше та найменше можливі значення к, для яких існує гарне розбиття купки зі ста монет на к купок.

10.(845) Довести, що для будь-якого натурального числа п існує п різних натуральних чисел таких, що їхня сума є повним квадратом, а добуток повним кубом.

Старша ліга

1.(846) Задано послідовність цифр ai.ar,—,agg, яка задовольняє такі умови:

1) якщо для деякого п Оп = 1, то а„+і ф 2 ;
2) якщо для деякого ***к аь*** = 3, то ***а^+і ф*** 4.

Доведіть, що існують два індекси *к,1 є* {1,2, ...,98} такі, що <к = *Щ* і Ofc+l = ßj+l-

2.(847) Дано трикутник ABC. Кола з центрами в точках A і C, які проходять через B, перетинають описане коло трикутника ABC в точках D і E відповідно, а перетинаються між собою в точці F. BF вдруге перетинає описане коло трикутника ABC в точці O. Довести, що O - центр описаного кола трикутника DEF.

3.(848) Нехай p, q - прості числа. Послідовність (a_n)> n > 0 задана таким чином: ао = 0, аі = 1, $a_{п+}1 = pa_n$+1 — qa_n, п > 0. Знайдіть усі пари (p, q), для яких існує k, таке що a^ = —3.

4.(849) Знайти усі трійки дійсних чисел (A, B, C) такі, що існує функція / : R —> R, яка Уж, y є R задовольняє рівняння

$$f(x + f(y)) = Ax + By + C.$$

5. Дивись задачу № 833.

6.(850) Доведіть, що система рівнянь

$$x^2 - xy + y^2 = 5''$$
$$x^2 + xy + y^2 = 7^к$$

не має розв'язків в натуральних числах, тобто не існує четвірок натуральних чисел (х,у,тг,к), які задовольняють кожне з рівнянь системи.

7.1.(851) За один хід можна замінити впорядковану пару чисел (р, q) або на пару (q,p), або на пару $(2p - q, p + 4q)$. Чим можна з пари (7,8) за декілька ходів отримати пару (2007,2008)?

8.1.(852) У гострокутному трикутнику ABC провели висоти AD, BE і CF та відмітили ортоцентр H. Коло w з центром в точці O, проходить через точки А і Я та перетинає сторони AB і AC другий раз в точках P і Q (відмінних від A) відповідно. Коло, описане навколо трикутника OPQ, дотикається до відрізка BC в точці R. Доведіть, щ о $\frac{CR}{m} = \frac{ED}{m}$

8.2. Дивись задачу № 836.

8.3.(853) Нехай $P\{x)$ - многочлен четвертого степеня із старшим коефіцієнтом 1. Відомо, що $P(x)$ має чотири різних дійсних корені, які належать відрізку [—1,1]. Знайдіть найбільше можливе значення константи с, такої що $P(x) > c$ для усіх дійсних x і для будь-якого полінома $P(x)$, що задовольняє описаним вище умовам.

8.4.(854) Для деякого х різниця будь-яких двох з чисел $ж^3$, $ж^4$ та $ж^5$ - ціле число. Доведіть, що ж - ціле число.

9.(855) У мотопробігу беруть участь п Є N мотоциклістів. Кожен мотоцикліст починає пробіг у довільний момент часу та у довільній точці траси, їде з довільною постійною швидкістю в напрямку від початку траси, та закінчує їхати у довільний момент часу. Лідером у даний момент часу вважається мотоцикліст, який їде по трасі найдалі від її початку. (Мотоциклісти, які не їдуть або які почали чи закінчили їхати у даний момент, не можуть бути лідерами). Відомо, що ніякі два мотоциклісти не будуть одночасно лідерами протягом деякого ненульового проміжку часу. Послідовно відмічають інтервали між моментами зміни лідерами. Довести, шо таких інтервалів менше $2П^{1,5}$.

10.(856) *x*, *y, z* - дійсні числа, які задовольняють співвідношення

$$x + y + z = 1 \text{ та } \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y + \operatorname{arctg}z = \frac{Т}{—}.$$

Доведіть, що $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 1$ для усіх натуральних чисел *n*.

Математичний бій 4

(8 листопада 2008 року)

Молодша ліга

1.(857) Нехай у нас є 2п однакових на вигляд монет, причому відомо, що *n* з них мають вагу *a,* а решта - 6, *a < Ь.* За одне зважування ми можемо визначити сумарну вагу п монет. Довести, що (п + 1) зважування достатньо для визначення *a* та 6.

2.1.(858) Додатні числа а, 6, с є довжинами сторін деякого трикутника АВС. Також відомо, що для довільної трійки *(а* +1, *Ь,* с), (а, 6+ 1,с), (о, Ь,с+ 1) існує трикутник зі сторонами, довжини яких виражені числами з трійки. Знайти всі можливі значення, які може приймати площа трикутника АВС.

2.2.(859) Для додатних чисел *a,* Ь, *c* довести нерівність:

2»2 »2 2 2 2 3 , і3 , 3

ab oc c a a +o +c

a + b Ь + c c + a ~ **2**

3.(860) Назвемо число суперпростим, якщо довільна кількість його цифр, що йдуть підряд утворюють просте число (наприклад: 53 - суперпросте, тому що числа 53,5,3 - прості). Знайти всі суперпрості числа.

4.1.(861) Послідовність натуральних чисел задана наступним чином: ßi = 0, a_p = 1 для довільного простого *p* та a_{mn} = ma_n + na_m для будь-яких натуральних *m* та *n*. Знайти найменше натуральне *n*, для якого 2U08 степінь двіики.

4.2.(862) Три різні цілі числа a,Ь,c утворюють арифметичну прогресію. Ці ж самі числа (можливо, в іншому порядку) утворюють геометричну прогресію. Довести, що (a^2 + $Б^2$ + c^2) ділиться на 21.

5.1.(863) Нехай *P* - така точка бісектриси *CL* гострокутного трикутника ABC, що

ZAPB = 180° - *\ZACB-, кі* і $к_2$ ~ кола, описані навколо трикутників *APC* і *BPC* відповідно. Пряма *BP* перетинає *кі* в точці *Q ф P,* пряма *AP* перетинає $к_2$ в точці *R ф P.* Нехай *S* - точка перетину дотичної до *кі* в точці *Q* з дотичною до $к_2$ в точці *R, T* - точка перетину дотичної до *к* в точці *A* з дотичною до $к_2$ в точці *R.* Довести, що >15 = *BT.*

5.2.(864) Нехай *w* - коло з центром в точці *O* і радіусом *R.* З точки *A* на колі проведено дотичну *I* до кола *w,* а через точку *O* проведено пряму *p,* що перетинає *I* в точці *M,* а коло *w* в точках *B і C* (точка *B* лежить між *O* і *M*). Відомо, що

AM = *RV*3. Довести, що центр описаного кола трикутника *AMC* лежить на колі *w.*

6.(865) Знайти найменше натуральне число, яке при деякому натуральному п є дільником ($2^П$ + 15) та представляється у вигляді ($3ж^2$ - *Axy* + $3j/^2$) при *x, y Є* N.

7.(866) Декілька школярів вишикувались в шеренгу. Виявилось, що у всіх школярів, окрім першого та останнього, кількість знайомих справа дорівнює кількості знайомих зліва. Довести, що у крайніх школярів однакова кількість знайомих.

8.(867) Довести, що відрізки, які сполучають центри чотирьох квадратів, зображених на рис. 22, перпендикулярні.

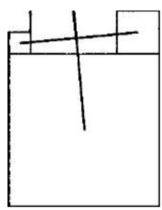

Рис. 22

9.(868) Знайти усі пари цілих *s* і *t,* для яких рівняння x^n + *SX* - 2007 = 0 і x^n + *tx* - 2008 = 0 (де *n* - натуральне число) більше 1 мають принаймні один спільний корінь.

10.(869) Натуральні числа від 1 до 50 виписані на дошку по п'ятдесят разів кожне. На кожному кроці Дмитрик стирає два рівних числа і записує на дошці їх суму. Скільки кроків необхідно Дмитрику, щоб отримати на дошці всі числа різними?

Старша ліга

1.(870) У трьох країнах є декілька школярів, які товаришують між собою. Будь-які двоє школярів з різних країн спілкуються між собою мовою однієї з тих країн, в яких вони живуть. Також відомо, що серед будь-яких трьох школярів з трьох різних країн знайдеться той, хто спілкується з іншими двома мовою своєї країни. Довести, що знайдеться школяр *x* та країна M, відмінна від тої, в якій живе *x*, що спілкується з усіма своїми товаришами з M мовою своєї країни.

2.(871) Ai,B\, *C*i - такі точки описаного кола трикутника ABC, що *AAi\\BB\\\CCi.* Довести, що ортоцентри трикутників *A\BC, AB\C* і ABCi лежать на одній прямій.

3.**1**.(872) Нехай натуральне число п > 3і ai,a$_2$, ...,a$_п$ ~ невід'ємні дійсні числа, такі що ai + a_2 + ... + a_n = 2. Визначте мінімальне значення виразу

$$\frac{«1}{a_2^2+1}+\frac{«2}{a_3^2+1}+\dots+\frac{a_{n-1}}{a_n^2+1}+\frac{a_n}{a_1^2+1}*$$

3.2.(873) Нехай $P(x) = x^2+ax + Ь$- дійсний поліном з коефіцієнтом $a < 2$. Припустимо, що рівняння $P(P(x)) = 0$ має чотири корені і сума двох з них не перевищує (—1). Доведіть, що $P(x + y) > P(x) + P\{y)$ для всіх невід'ємних дійсних чисел *x, y.*

4. Дивись задачу JYs 866.

5.1.(874) Послідовності (х$_п$), (у$_п$), п > 0 задані наступним чином хо = *1,xi*= 2, x_{n+2} = 4х$_{п+1}$ - $5x_n$, *yo* = 0,$y_г$ = 1, y_n+1 = 4«/„+i - $5y_n$, п > 0. Знайдіть усі можливі значення (х$_п$,у$_п$), п > 0, де через (о, Ь) позначається найбільший спільний дільник натуральних чисел *a, Ь.*

5.2.(875) Розв'яжіть у цілих числах рівняння $x^2 + 2xy + 2y^2 = 13$.

6.(876) Нехай а і *Ь* - натуральні числа, які мають по п Є N цифр у десятковому запису, причому перші *m є* N цифр зліва направо у них співпадають. Доведіть, що тоді \/a — \fb < —\Qm-2'

7.(877) У Петра є стопка однакових білих квадратиків ***p*** x ***p,*** де ***p*** - просте число. Він їх фарбує в червоний та синій колір таким чином, щоб кожна клітина була повністю пофарбована в один з двох кольорів і таким чином, щоб серед усіх стовпчиків усіх квадратів не було однаково зафарбованих, а також, щоб серед усіх рядків усіх квадратиків не було пофарбованих однаково. Повертати та перегортати квадрати не можна. Яку найбільшу кількість квадратів таким чином Петро може зафарбувати?

8.1.(878) Нехай задано трикутник ABC. Позначимо через m_a, m_b, m_c довжини медіан цього трикутника, що проведені з вершин A, B, C відповідно. Доведіть наступну нерівність:

—^ $3 m_b m_c$ ^ ~ > sm /.BAC.

™I + ™$_b$ + $^m c$

8.2.(879) Нехай I - центр вписаного кола трикутника ABC. Виявилось, що $CA + AI = CB$ і $\angle CAB = 75°$. Знайдіть $\angle ABC$.

9. Дивись задачу JYs 864.

10.1.(880) Нехай дійсні числа жо.жь задовольняють умови: $xo = 0$, $x_{n+}\backslash$ — 1, $xo < xi < ... < x_n <$ ж$_{п+}$і. Припустимо, що ці

п+1 ^

числа задовольняють наступну систему рівнянь: У2 ^—_ = 0,

k = 1, п. Доведіть, що а:$_{п+}$х-fc = 1 — хь, k = 1, п.

10.2.(881) При яких натуральних числах n рівняння

+ + 1| + ... + |а: + n| = n

має розв'язки?

Математичний бій 5

(9 листопада 2008 року)

Молодша ліга

1.(882) Олексій та Дмитро грають у гру. В множині (1,2,..., п} вони по черзі відмічають числа, при умові, що кожне число відмічається не більше одного разу і спочатку всі числа не відмічені. Першим ходить Олексій. Гра закінчується, як тільки серед відмічених чисел знайдеться арифметична прогресія довжини 4, переможцем при цьому вважається гравець, після ходу якого вона з'явилася. Знайти найменше п, при якому Олексій має виграшну стратегію (незалежно від гри Дмитра)

2.(883) Нехай чотирикутник *АВСБ,* в якому *АВ = ВС* і *АБ = ЗБС,* вписано в коло. На діагоналі *ВБ* відмічено точку Д, для якої *БЯ = 2ЯВ,* а на відрізку *АЯ* точку ф таку, що */АБС} = /ВБС}.* Нехай *Р* - точка перетину відрізку *АВ* та прямої *С}Б.* Знайти кут */АРБ,* якщо */АВС2 + /СВБ = /С}ВБ.*

3.1.(884) Послідовність *(x_n)* задана наступним чином: *x* =
x_n+i = *x^* + *x_n, n* **є** N. Знайти цілу частину числа

1 + _ J _ _ + + 1

Xi + 1 *X2 + 1* *X200S + 1*

3.2.(885) Чи можна пофарбувати усі вершини 2009-кутника у жовтий та блакитний колір так, що серед шести вершин, що йдуть підряд, рівно 3 блакитних, або рівно одна жовта?

4.(886) Знайти всі трицифрові числа $\overline{abc}$, для яких - = *abc + a + b + c* = *ab + ac + Ьс* =
ціле число і жодна з цифр а,Ь,с не дорівнює 0.

5.(887) Довести, що при натуральному п > 2, рівняння *Д.2П*-1 + $2x^{2n}$~^{2} + $3x^{2n}$~^{3} +… + (2п — *1)x + 2n* = 0 не має цілих коренів.

6.(888) Натуральне число назвемо гарним, якщо в його десятковому записі не менше двох цифр та всі цифри рівні (наприклад: 11, 888). Назвемо розклад натурального числа на доданки чудовим, якщо всі доданки в розкладі гарні та попарно різні (наприклад: 2008=1111+666+99+88+44).

а) Довести, що існує чудовий розклад числа 8002.

б) Знайти кількість таких чудових розкладів числа 8002, що мають мінімальну кількість доданків (два розклади, що відрізняються лише порядком доданків, вважаються однаковими).

7.1.(889) Довжини всіх висот деякого різностороннього трикутника - цілі числа. Знайти найменше можливе натуральне число, що може бути довжиною радіуса вписаного кола цього трикутника.

7.2.(890) Нехай 5„ = 1 • 2 + 2 • 3 + ... + *n(n* + 1), *n Є* N. Чи завжди між числами 5„ і 5„+і знайдеться повний квадрат?

8.1.(891) Для додатних *а,Ь,с* таких, що $abc = 1$, довести нерівність:

1 / >/(1 + а)(1 + Ь) + 1 / у/(1 + Ь)(1+с) = + 1 / у/(1 + с)(1 + *а)* . < 3 / *2'*

8.2.(892) Розв'язати систему рівнянь

$$x + y^2 = x^3,$$
$$y + x^2 = y^3.$$

9.1.(893) У трикутнику *ABC AM* - медіана, *BB*ь *CC* - висоти. Через точку *A* провели пряму, перпендикулярну *AM,* яка перетинає ***B****B i, CCi* в точках *E, F* відповідно. Нехай *k* - коло, описане навколо трикутника *EFM,* а *кі* і fc$_2$ - кола, що дотикаються до прямої *EF* і дотикаються (внутрішнім чином) дуги *EF* кола *к,* що не містить точку *М.* Точки перетину *к* і κ_2 позначимо *Р* і *Q.* Доведіть, що точки *P,Q,M* лежать на одній прямій.

9.2.(894) Два кола *кі* і κ_2 дотикаються, *АВ* - їхня спільна дотична *А Є кі, В є* κ_2. *АР* - діаметр *к\, Q* - точка на κ_2 така, що *PQ* - дотична до κ_2. Довести, що *АР = PQ.*

10.(895) На координатній площині знаходяться чотири фішки в точках (0,1), (0,0), (1,0), (1,1). За один хід можна переставити довільну фішку з точки (а, *Ь)* в точку *(c,d),* якщо в точці

Л 1
1- (a + c), -(Ь + d) J\ знаходиться деяка фішка. Чи може так

трапитись, що через деяку скінченну кількість кроків фішки будуть знаходитись в точках (0,0), (1,1), (3,0) і (2, —1)?

Старша ліга

1.(896) Нехай ао,аі, ...,$a_{п+}$і - послідовність дійсних чисел, яка задовольняє наступні умови: ао = $a_п$+і — 0, |«fc-i — 2а^ + а,к+11 < 1, *к* = 1, п. Доведіть, що |ßfc| < —*к = 0,n + 1.*

2.1.(897) На площині зображено трикутник АВС і в ньому відмічені центр вписаного кола І та точки Аі,В\,С\ дотику цього кола до сторін *ВС, СА* і *АВ* відповідно. За допомогою лінійки та олівця побудуйте центр кола, описаного навколо трикутника АВС.

2.2.(898) Пряма, що паралельна стороні ВС трикутника АВС, перетинає сторони *АВ* і *АС* в точках *F* і *Е* відповідно. Доведіть, що кола, які побудовані відрізках *BE* і *CF* як на діаметрах, перетинаються в точці, що лежить на висоті трикутника АВС, що опущена з вершини *А.*

3.1.(899) Нехай у просторі задані п сфер, що не мають спільних точок, з радіусами *Ri,* R_2, R_n- Позначимо через *Sk* площу множини точок ~~на~~ *к* -й сфері, з яких не видно жодної точки жодної іншої сфери,

I ї • 5*
к = 1, *n.* Доведіть, ЩО -JTJ + + ... + -jrr- = 47Г.
Щ Щ R l

3.2.(900) На острові живуть брехуни і лицарі. Лицарі завжди кажуть правду, брехуни завжди брешуть. Одного разу 12 жителів острову зібралися в компанію і зробили наступні заяви. Двоє сказали: 'Рівно двоє з тут присутніх брехуни". Ще четверо сказали: 'Рівно четверо з тут присутніх брехуни", останні шестеро 'Рівно шестеро з тут присутніх брехуни". Скільки брехунів могло бути у цій компанії?

4.(901) Нехай $x_n = 2^{2^n} + 1$ і m - найменше спільне кратне чисел X2,хз, —,Х2оо8. Знайдіть останню цифру числа т-

5.(902) Дано коло *к,* пряма *р,* що його не перетинає, і точка *О $ к.* Розглядаються кола І, які дотикаються зовнішнім чином до кола *к* та до прямої *р* в деяких точках *А* та *В* відповідно. Доведіть, що кола, які описані навколо трикутників *ОАВ* (якщо цей трикутник не вироджений) мають спільну точку, відмінну від О, або дотикаються до деякої прямої.

6.1.(903) Для кожної пари натуральних чисел *т,п* > 1 позначимо через $K_{m<n}$ найменше натуральне число, таке що виконується така умова: для будь-якого многочлена *Р{х)* існують такі многочлени **Рі,Р₂,** -;$P\kappa_{m,n}$ і *Яї,СІ2,-,Як*$_{m,n}$ ЩО

$$P(x)= \sum_{»=i}^{\kappa_{,,}} (РЛ^*)+ <№))\bullet$$

Знайдіть усі пари (т, п), для яких 1 < $К_{тіП}$ < оо.

6.2.(904) Задані невід'ємні числа х,у,г. Доведіть, що найменше з чисел $(x — y)^2$, $(y — г)^2$ та $(г — x)^2$ не перевищує $\sim\{x^2 +y^2 + г^2)$.
О

7.(905) В країні є декілька міст (щонайменше 2), деякі з них з'єднані дорогами, які мають довжину 1 км. Відстань від будь-якого міста до будь-якого іншого складає не більше (І км (гі > 0). Довжина будь-якого циклічного маршруту між містами (маршрут починається і закінчується в одному і тому ж самому місті і проходить через різні міста) не менше ніж *(2(1* +1) км. Причому хоча б один циклічний маршрут у цій країні існує. Довести, що з кожного міста виходить однакова кількість доріг.

8.(906) Розв'яжіть систему рівнянь:
$$x^2 + X-1 — y,$$
$$y^2 + y — 1 = г,$$
$$г^2 + г - 1 = x.$$

9.1.(907) Відомо, що серед чисел $к_п$ кожне натуральне число від 1 до п зустрічається по одному разу. Інверсією елемента $к_3$ назвемо кількість таких індексів і, що *і < j і к,* > $к_3$. Відомо, що для кожного натурального *з* від 1 до *п :* |/с., — < 2008. Довести, що інверсія кожного елемента *кі,* /с2,..., $к_n$ не перевищує 2008.

9.2.(908) Назвемо натуральне число *п* **корисним,** якщо будь-яке натуральне число, що менше за п, можна подати у вигляді суми декількох різних дільників *п.* Доведіть, що добуток двох корисних чисел - корисне число.

10.1.(909) Чи існує поліном / степені 2008 з цілими коефіцієнтами, такий що /(п), / (/(п)), / (/ (/(п))),... є попарно взаємно простими числами для будь-якого цілого п?

10.2.(910) Доведіть, що для будь-якого натурального числа а знайдеться натуральне число *Ь,* таке що *а* і *Ь* взаємно прості, а число $a + Ь^2$ - складене.

Переможці математичної каруселі

Молодша ліга

I місце команда Харків:

Теплова Дар'я, Гулін Всеволод, Родіонов Георгій, Лійко Вікторія, Панкратов Михайло, Хрущов Тимур

II місце команда КПНЛ № **145:**

Батан Олександр, Мироненко Антон, Лукович Тетина, Ротинський Михайло, Білецький Іван, Набіулін Данило, Філімснова Анастасія

III місце команда УФМЛ:

Бігун Олександр, Близнюк Олександр, Гладун Дарина, Назаренко Єгор, Райський Роман, Друженко Тетяна

Старша ліга

I місце команда Харків+Севастополь:

Соболев Дмитро, Соболев Євген, Женнленко В'ячеслав, Лисакевнч Анастасія, Калашник Владислав, Деркач Арсеній

II місце команда КПНЛ № **145:**

Балабанов Олександр, Балабанов Олег, Підпружников Дмитро, Моторний Олександр, Леонтьев Олексій, Коляденко Марія, Марушкевич Дмитро, Щечкін Антон

III місце команда № **208:**

Сердюк Назар, Сенін Віталій, Павлик Богдан, Лепеха Сергій, Макаров Микита, Сорока Богдан

Переможці командної олімпіади

Молодша ліга

I місце команда Харків

II місце команда Закарпаття+Львів:

Козачук Сергій, Михаленич Микола, Савіцький Тарас, Білий Роман, Петровський Богдан, Кицмей Павло, Мучичка Сергій

III місце команда КПНЛ № **145**

Старша ліга

І місце команда № **208**

ІІ місце команда Харків+Севастополь

ІІІ місце команда УФМЛ:

Шульга Олександр, Жигулін В'ячеслав, Танцюра Богдан, Дудар В'ичеслав, Лисенко Олександр, Щедріна Дарія

Переможці турніру математичних боїв

Молодша ліга

І місце команда Закарпаття+Львів

ІІ місце команда Харків

ІІІ місце команда КПНЛ № **145**

Старша ліга

І-ІІ місце команда № **208**

І-ІІ місце команда Харків+Севастополь

ІІІ-V місце команда УФМЛ

ІІІ-V місце команда КПНЛ № **145**

ІІІ-V місце команда Русанівський ліцей:

Древаль Максим, Мазур Антон, Карпенко Дмитро, Савенко Микита, Снігурський Михайло, Дідковський Олександр, Крамаренко Олексій