**XXIII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики**

****

**"*Турнір чемпіонів*"**

2016 р.

***Математика.***

**Старша ліга.**

1. Многочлени  та  однакових степенів з цілими коефіцієнтами називаються *схожими*, якщо вони отримуються один з одного перестановкою коефіцієнтів (наприклад, схожими є многочлени  та ). При якому найбільшому значенні  для будь-яких схожих многочленів ,  число  обов’язково ділиться на ?
2. Знайти всі такі функції , для яких рівність  виконується для всіх дійсних  та .
3. Нехай  – пряма, яка проходить через вершину  рівностороннього трикутника , паралельно до сторони . На стороні  довільно відмітили точку . Бісектриса кута  перетинає пряму  у точці . Доведіть, що .
4. Доведіть, що рівняння  має хоча б два розв’язки в натуральних числах.
5. Квадрат  розбито на 64 одиничних квадратики, кожний із яких повністю пофарбовано в білий або чорний колір, причому чорних одиничних квадратиків парна кількість. Дозволяється обрати довільні два одиничних квадратики, «з’єднаних» ходом шахового коня, та перефарбувати їх: чорний (чорні) – в білий колір, а білий (білі) – у чорний. Назвемо таку операцію *кроком*. Для довільного початкового розфарбування  (яке містить парну кількість чорних одиничних квадратів) позначимо через  найменшу можливу кількість кроків, необхідну для перефарбування всіх одиничних квадратів в чорний колір (тобто ми бажаємо отримати копію відомої картини Малєвіча). Знайдіть найбільше можливе значення величини . Відповідь обґрунтуйте.

**XXIII Всеукраинская комплексная олимпиада по математике, физике и информатике**

****

**"*Турнир чемпионов*"**

2016 г.

***Математика.***

**Старшая лига.**

1. Многочлены  та  одинаковых степеней с целыми коэффициентами называются *похожими*, если они получаются друг из друга перестановкой коэффициентов (например, похожими являются многочлены  и ). При каком наибольшем значении  для любых похожих многочленов ,  число  обязательно делится на ?
2. Найти все такие функции , для которых равенство  выполняется для всех действительных  и .
3. Пусть  – прямая, проходящая через вершину  равностороннего треугольника , параллельно стороне . На стороне  произвольно выбрали точку . Биссектриса угла  пересекает прямую  в точке . Докажите, что .
4. Докажите, что уравнение  имеет хотя бы два решения в натуральных числах.
5. Квадрат  разбит на 64 единичных квадратика, каждый из которых полностью окрашен в белый или черный цвет, причем черных единичных квадратиков четное количество. Разрешается выбрать любые два единичных квадратика, «соединенных» ходом шахматного коня, и перекрасить их: черный (черные) – в белый цвет, а белый (белые) – в черный. Назовем такую операцию *шагом*. Для произвольной начальной раскраски  (которая содержит четное количество черных единичных квадратов) обозначим через  наименьшее возможное количество шагов, необходимое для перекрашивания всех единичных квадратов в черный цвет (то есть мы хотим получить копию известной картины Малевича). Найдите наибольшее возможное значение величины . Ответ обоснуйте.