**XXII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики**

****

**"*Турнір чемпіонів*"**

2015 р.

***Математика. Юніорська ліга***

1. Довести, що для довільного дійсного  виконується рівність



(тут  – це найбільше ціле число, яке не перевищує ).

1. На площині дано чотири точки: , , , . Знайти усі такі пари цілих чисел , для яких графік квадратного тричлена  перетинає кожну із прямих , ,  та , причому усі точки перетину мають цілі координати.
2. В рівнобедреному трикутнику  () проведено бісектрису  (точка  належить ). Відомо, що . Знайти градусну міру кута .
3. Дільник натурального числа назвемо ***власним***, якщо він відмінний від 1 і самого цього числа. Натуральне число назвемо ***гарним***, якщо найбільший власний дільник цього числа дорівнює сумі власного дільника, другого за величиною і власного дільника, третього за величиною. Наприклад, число 18 є гарним, оскільки 9 (його найбільший власний дільник) дорівнює сумі чисел 6 (другий власний дільник за величиною) і 3 (третій власний дільник за величиною). Скільки існує гарних чисел, які не перевищують 1500000?
4. Усі натуральні числа пофарбовано у два кольори: чорний і білий. Відомо, що для довільних двох чисел різного кольору їхня сума є чорним числом, а добуток – білим.

а) Якого кольору може бути добуток двох білих чисел? Відповідь обґрунтуйте.

б) Знайти усі розфарбування чисел, які задовольняють умову задачі.

**XXII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики**

****

**"*Турнір чемпіонів*"**

2015 р.

***Математика. Юниорская лига***

1. Доказать, что для произвольного действительного  выполняется равенство



(здесь  – наибольшее целое число, не превышающее ).

1. На плоскости задано четыре точки: , , , . Найти все такие пары целых чисел , для которых график квадратного трехчлена  пересекает каждую из прямых , ,  и , причём все точки пересечения имеют целые координаты.
2. В равнобедренном треугольнике  () проведена биссектриса  (точка  принадлежит ). Известно, что . Найти градусную меру угла .
3. Делитель натурального числа назовём ***собственным,*** если он отличен от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём ***красивым***, если наибольший собственный делитель этого числа равен сумме собственного делителя, второго по величине, и собственного делителя третьего по величине. Например, число 18 является красивым, поскольку 9 (его наибольший собственный делитель) равняется сумме чисел 6 (второй собственный делитель по величине) и 3 (третий собственный делитель по величине). Сколько существует красивых чисел, которые не превосходят 1500000?
4. Все натуральные числа покрашены в два цвета: чёрный и белый. Известно, что для произвольных двух чисел разного цвета их сумма является чёрным числом, а их произведение – белым.

а) Какого цвета может быть произведение двух белых чисел? Ответ обоснуйте.

б) Найти все раскраски чисел, удовлетворяющие условию задачи.