**XXII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики**

****

**"*Турнір чемпіонів*"**

2015 р.

***Математика***

**Задача 1.** Розв’язати рівняння

*.*

**Задача 2.** Нехай  і  для всіх натуральних . Доведіть, що для будь-якого натурального числа  існує такий індекс , що  ділить .

**Задача 3.**Дано трикутник . Нехай  – описане коло цього трикутника, а  – вписане коло цього трикутника. Нехай  – коло, яке дотикається сторін  і , а також дотикається внутрішнім чином кола  у точці . Пряма  перетинає коло  у двох точках  і  ( лежить між  і ). Нехай  та  – центри кіл  і . Доведіть, що ODǁIQ.

**Задача 4.** Нехай  – многочлен -го степеня з дійсними коефіцієнтами, а . Чи можуть графіки функцій  і  перетинатися рівно в  точках?

**Задача 5.** Розв’язати в натуральних числах рівняння

.

**XXII Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики**

****

**"*Турнір чемпіонів*"**

2015 р.

***Математика***

1. Решить уравнение

**

1. Пусть  и  для всех натуральных . Докажите, что для произвольного натурального числа  существует такой индекс , что  делит .
2. Дано треугольник . Пусть  – описанная окружность этого треугольника, а  – вписанная окружность этого треугольника. Пусть  – окружность, которая касается сторон  и , а также касается внутренним образом окружности  в точке . Прямая  пересекает окружность  в двух точках  и  ( расположена между  и ). Пусть  и  – центры окружностей  и . Докажите, что ODǁIQ .
3. Пусть  – многочлен 20-й степени с действительными коэффициентами, а . Могут ли графики функций  и  пересекаться ровно в 30 точках?
4. Решить в натуральных числах уравнение

.